

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Physique

Électronique

MP

Cours

Méthodes

Exercices résolus

L. DOUCHET • M. SAUZEIX
S. TISSERAND

Nouveau programme

 **Bréal**
L'ÉDITEUR DES PRÉPAS
Sciences et Techniques



LES NOUVEAUX
Précis
BRÉAL

Électronique

MP

L. DOUCHET

Professeur agrégé en classes préparatoires, Lyon

M. SAUZEIX

Professeur agrégé en BTS électrotechnique, Lyon

S. TISSERANT

Professeur à l'École Supérieure d'Ingénieurs de Luminy

LES NOUVEAUX

Précis

B R É A L

Mathématiques 2^e année

- Algèbre et Géométrie / MP
- Analyse / MP

Physique 2^e année

- Mécanique / MP - PC
- Électromagnétisme / MP
- Électronique / MP
- Optique / MP-PC-PSI-PT
- Thermodynamique / MP

Chimie 2^e année

- Chimie / MP-PT

Exercices 2^e année

- Mathématiques / MP
- Physique / MP

Maquette et couverture : Sophie Martinet

Suivi éditorial : Agnès Nicol

Réalisation : Alpha-Édit

© Bréal 2004

Toute reproduction même partielle interdite.

ISBN 2 7495 0398 1

Les Nouveaux Précis Bréal sont conçus pour apporter aux étudiants en classes préparatoires **une aide efficace dans leur travail**. Tout en conservant la rigueur des éditions précédentes, nous nous sommes efforcés d'aplanir au mieux toutes les difficultés inhérentes au discours scientifique. Nous savons par expérience que le rythme de la prépa n'autorise aucune perte de temps, et nous pensons qu'une explication claire et précise permet d'éviter au lecteur tout « blocage » inutile.

Strictement conforme au nouveau programme, cet ouvrage s'adresse à tous les étudiants de deuxième année de la filière MP. Chaque chapitre est divisé en trois parties complémentaires.

- Le **Cours**, qui présente les principaux raisonnements à comprendre et à connaître, accompagnés de nombreuses applications directes afin d'assimiler immédiatement les notions traitées.
- Les pages **Méthodes**, qui contiennent deux rubriques indispensables à la progression personnelle : *L'essentiel* permet de mémoriser rapidement tout ce qu'il faut retenir du chapitre, et la *Mise en œuvre* expose les grandes méthodes afin d'acquérir les bons « réflexes » en situation.
- Les **Exercices**, classés par niveaux de difficulté, dont les solutions détaillées sont enrichies d'astuces et de conseils (précédés des logos ☞ ou △). Certains exercices sont accompagnés de courtes indications, comme en colle : il suffit parfois d'un petit « déclic » pour démarrer !

Il nous est paru nécessaire d'accorder aux **Méthodes** et aux **Exercices** une place équivalente à celle du **Cours**. En effet, l'apprentissage ne peut pas être efficace sans combiner étroitement ces trois dimensions : comprendre, savoir faire et s'entraîner. En revanche, s'il organise intelligemment son travail, l'étudiant pourra s'améliorer dans toutes les disciplines en gérant au mieux son temps et ses efforts, principale condition de la réussite.

Ainsi, les étudiants de MP disposeront, en électronique, d'un outil de travail complet, adopté au rythme soutenu de cette seconde année de préparation aux concours.

Nous espérons que ce nouveau Précis les aidera à passer avec réussite leurs épreuves, et nous répondrons volontiers à toute suggestion, remarque ou critique par e-mail à l'adresse suivante : infos@editions-breial.fr.

L'éditeur et les auteurs

This One



KK7B-ED8-C5ZA

Sommaire

<u>Chapitre 1 ■</u>	Analyse harmonique d'un signal	5
	<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	16
	<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	19
<u>Chapitre 2 ■</u>	Filtres du second ordre	29
	<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	52
	<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	58
<u>Chapitre 3 ■</u>	Effets d'un filtre du premier ou du second ordre	83
	<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	101
	<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	105
<u>Chapitre 4 ■</u>	Caractère intégrateur ou dérivateur	119
	<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	139
	<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	144
<u>Index</u>		159

Analyse harmonique d'un signal

Introduction

Nous étudions dans ce chapitre la décomposition des signaux périodiques en superposition de signaux sinusoïdaux.

L'intérêt fondamental de l'analyse harmonique des circuits électroniques qui sera étudiée dans la suite de ce cours repose sur cette propriété.

Plan du chapitre 1

A. Signaux périodiques et signaux sinusoïdaux	6
1. Caractéristiques d'un signal périodique	6
2. Caractéristiques d'un signal sinusoïdal	7
B. Décomposition en série de Fourier	8
1. Théorème de Fourier	8
2. Fonctions paires et impaires	10
C. Spectre de Fourier et représentation fréquentielle	11
1. Invariance temporelle	11
2. Représentation fréquentielle	12
3. Valeur efficace et spectre de puissance	13
D. Synthèse fréquentielle d'un signal périodique	15
Méthodes	
L'essentiel : mise en œuvre	16
Énoncés des exercices	19
Indications	20
Solution des exercices	21

A. Signaux périodiques et signaux sinusoïdaux

La notion de signal est très vaste. En physique, nous appelons signal toute grandeur mesurable qui dépend d'autres quantités telles que l'espace, le temps, la température, l'éclairement, etc. En général, un signal peut être modélisé par une fonction mathématique d'une ou plusieurs variables. Dans ce cours, nous nous intéressons aux signaux électriques variables avec le temps.

A.1. Caractéristiques d'un signal périodique

Définition 1

Un signal électrique (tension ou courant) $s(t)$ est dit **périodique** s'il reprend identiquement la même valeur à intervalles de temps égaux :

$$\exists T \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall t \in \mathbb{R}, \text{ on a } s(t + T) = s(t).$$

- L'intervalle de temps minimal nécessaire pour retrouver la même valeur de la fonction est appelé **période** T et s'exprime en seconde (s).
- La **fréquence** f du signal, exprimée en hertz (Hz), est l'inverse de la période T (en s) :

$$f = \frac{1}{T}.$$

- La **valeur moyenne** S d'un signal périodique est, par définition, calculée sur un intervalle de temps de la largeur est égale à une période¹ :

$$S = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} s(u) du = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt.$$

Cette valeur moyenne, exprimée dans la même unité que le signal, est indépendante du choix de la borne inférieure t de l'intervalle.

La valeur moyenne I d'un courant périodique $i(t)$ correspond à l'intensité du courant continu qui fournirait la même charge ($q = IT$) pendant un intervalle de temps égal à une période.

- Le carré de la **valeur efficace** S_{eff} d'un signal périodique est égal à la valeur moyenne du carré de ce signal, soit :

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt}.$$

Calculons l'énergie dissipée pendant une période par un courant périodique $i(t)$ dans une résistance :

$$W_{\text{Joule}} = R \int_0^T i^2(t) dt = RI_{\text{eff}}^2 T.$$

Nous constatons que la valeur efficace d'un courant périodique correspond à l'intensité d'un courant continu qui produirait sur un intervalle de temps égal à une période la même perte d'énergie par effet Joule.

1. L'intégrale ne dépend pas de l'intervalle choisi. Un changement de variable permet de se ramener à $[0, T]$ ce qui ici allège les écritures dans le cours. Mais il est toujours possible de choisir un intervalle mieux adapté au cas étudié.

A.2. Caractéristiques d'un signal sinusoïdal

• Le régime sinusoïdal forcé a été étudié en première année. Nous avons à cette occasion rencontré des signaux sinusoïdaux.

Définition 2

Un signal physique $s(t)$ est dit **sinusoïdal** si son évolution temporelle peut se mettre sous la forme :

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi) \text{ avec } S_m > 0.$$

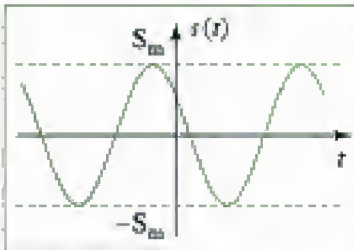


Fig. 1 - Représentation dans le domaine temporel d'un signal sinusoïdal.

La grandeur S_m , exprimée en volt pour une tension ou en ampère pour un courant, représente l'*amplitude* du signal.

La quantité $\omega t + \varphi$ est la *phase* à l'instant t , ou *phase instantanée*, du signal. Elle s'exprime en radian (rad). La *phase à l'origine* des temps, ou *phase initiale*, est φ . Elle est définie modulo 2π .

La grandeur ω , exprimée en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ou s^{-1} est appelée *pulsation* du signal.

• Un signal sinusoïdal est un signal périodique (fig. 1) dont il est facile de calculer la fréquence f et la période T en fonction de sa pulsation. La période correspond à l'intervalle de temps pour lequel la phase varie de 2π . Nous avons donc :

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \text{ (en s)} \text{ ou } f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \text{ (en Hz)}$$

– Comme l'intégrale d'une sinusoïde sur une période est nulle il en est de même pour la valeur moyenne d'un signal sinusoïdal :

$$S = \frac{1}{T} \int_0^T S_m \cos(\omega t + \varphi) dt = 0.$$

– Un peu de trigonométrie nous permet de calculer la valeur efficace d'un signal sinusoïdal. En effet :

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T S_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt \\ &= \frac{S_m^2}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos[2(\omega t + \varphi)]}{2} dt = \frac{S_m^2}{2}. \end{aligned}$$

– Il existe une relation simple entre la valeur efficace et l'amplitude d'un signal sinusoïdal :

$$S_{\text{eff}} = \frac{S_m}{\sqrt{2}}.$$

Cette interprétation physique de l'amplitude est possible car l'amplitude d'un signal sinusoïdal est un invariant temporel. Considérons en effet un signal sinusoïdal :

$$s(t) = S_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Par translation temporelle de τ nous obtenons :

$$s(t - \tau) = S_m \sin[\omega(t - \tau) + \varphi] = S_m \sin[\omega t + (\varphi - \omega\tau)].$$

La translation temporelle résulte en un changement de la phase à l'origine, mais ne modifie pas l'amplitude du signal.

B. Décomposition en série de Fourier

B.1. Théorème de Fourier

L'étude des signaux sinusoïdaux est essentielle car le théorème de Fourier, dont les hypothèses (fonction bornée, nombre fini de discontinuités sur une période) sont toujours vérifiées pour les signaux rencontrés en physique, permet de décomposer tout signal périodique en une somme de signaux sinusoïdaux.

Théorème 1

Toute fonction réelle $s(t)$ périodique, de fréquence f , peut s'écrire sous la forme d'une **somme infinie de fonctions sinusoïdales** (série trigonométrique) :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)], \text{ avec } \omega = 2\pi f.$$

Les coefficients a_n et b_n sont réels et peuvent être calculés à partir des expressions suivantes :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt \\ a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(n\omega t) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(n\omega t) dt. \end{cases}$$

Cette décomposition signifie que les fonctions $\cos(n\omega t)$ et $\sin(n\omega t)$ constituent une base orthogonale de l'espace des fonctions considérées, vérifiant pour n et m entiers¹ :

$$\forall n, m, \quad \int_0^T \cos(n\omega t) \sin(m\omega t) dt = 0.$$

$$\forall n \neq m, \quad \int_0^T \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt = \int_0^T \sin(n\omega t) \sin(m\omega t) dt = 0.$$

$$\forall n \neq 0, \quad \int_0^T \cos^2(n\omega t) dt = \int_0^T \sin^2(n\omega t) dt = \frac{T}{2}.$$

La constante a_0 représente la *valeur moyenne* du signal $s(t)$.

Définition 3

La constante a_0 est appelée **composante continue** du signal périodique.

Les fréquences des composantes sinusoïdales sont des multiples de la fréquence f du signal périodique décomposé.

Définition 4

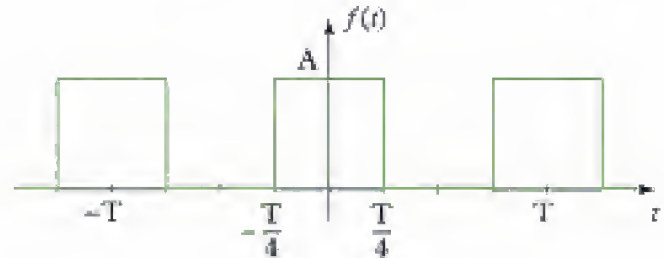
- La fréquence $f_1 = f$ correspond au **fondamental**, ou *premier harmonique* ($n = 1$).
- La fréquence $f_n = nf$ correspond à l'**harmonique d'ordre n** ($n > 1$).

1. Pour calculer ces intégrales, il suffit de transformer un produit de sinusoïdes en une demi somme (trigonométrie classique). Si $n \neq m$, les intégrales des sinusoïdes de pulsation $(n \pm m)\omega$ sont nulles. Si $n = m$, $\cos[(n-m)\omega t] = 1$ et $\sin[(n-m)\omega t] = 0$.

Application 1 Décomposition de Fourier d'un créneau

Considérons un créneau, d'amplitude A et de période T , défini par une succession périodique d'impulsions rectangulaires de hauteur A et de largeur $\frac{T}{2}$. L'origine des temps est choisie de manière à ce que le signal soit décrit par une fonction $f(t)$ paire, explicitée ci-dessous pour la période $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \forall t \in \left[-\frac{T}{2}, -\frac{T}{4}\right] \\ f(t) = A & \forall t \in \left[-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}\right] \\ f(t) = 0 & \forall t \in \left[\frac{T}{4}, \frac{T}{2}\right] \end{cases}$$



Calculer les coefficients a_n et b_n .

Solution

Pour le calcul des coefficients a_n et b_n nous choisissons la période centrée sur 0 : $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

Commençons par calculer la valeur moyenne a_0 du signal :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} A dt = \frac{AT}{T \cdot 2} = \frac{A}{2}.$$

La fréquence f et la pulsation ω du fondamental sont :

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Calculons les coefficients a_n pour $n > 0$; nous avons :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} A \cos(n\omega t) dt = \frac{2A}{T} \left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} \right]_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}$$

Ce qui nous donne :

$$a_n = \frac{4A}{n\omega T} \sin\left(\frac{n\omega T}{4}\right).$$

En nous souvenant que $\omega T = 2\pi$, il vient :

$$a_n = \frac{2A}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} a_n = 0 & \text{pour } n \text{ pair} \\ a_n = \frac{2A}{n\pi} & \text{pour } n = 4k+1 \\ a_n = -\frac{2A}{n\pi} & \text{pour } n = 4k+3 \end{cases}$$

Calculons les coefficients b_n :

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} A \sin(n\omega t) dt = \frac{2A}{T} \left[-\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega} \right]_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} = 0$$

Les coefficients b_n sont donc nuls.

B.2. Fonctions paires et impaires

Les fonctions cosinus et sinus sont respectivement paire et impaire. Montrons que la décomposition de Fourier d'une fonction paire ne comporte que des termes en cosinus, alors que celle d'une fonction impaire ne comporte que des termes en sinus.

* Considérons une fonction $f(t)$ paire, c'est-à-dire telle que :

$$f(-t) = f(t).$$

Montrons que tous les coefficients b_n de la décomposition de cette fonction sont nuls. Nous choisissons un intervalle d'intégration symétrique par rapport à $t = 0$, soit :

$$\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right].$$

Calculons b_n , pour $n > 0$:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt.$$

Découpons l'intervalle d'intégration en deux parties, c'est-à-dire :

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) \sin(n\omega t) dt + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt.$$

Effectuons un changement de variable ($u = -t$) dans la première intégrale, il vient :

$$\int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) \sin(n\omega t) dt = - \int_{\frac{T}{2}}^0 f(-u) \sin(-n\omega u) du.$$

En tenant compte de la parité de $f(t)$ nous avons donc :

$$b_n = -\frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(u) \sin(n\omega u) du + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt = 0.$$

* En procédant de manière similaire, il est facile de montrer que les coefficients a_n pour une fonction impaire sont nuls pour $n \geq 0$. En effet, on obtient alors :

$$\int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) \cos(n\omega t) dt = - \int_0^{\frac{T}{2}} f(u) \cos(n\omega u) du.$$

Propriété 1

* La décomposition en série de Fourier d'une fonction périodique paire ne comporte pas de termes en sinus :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t).$$

* La décomposition en série de Fourier d'une fonction périodique impaire ne comporte que des termes en sinus :

$$s(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega t).$$

C. Spectre de Fourier et représentation fréquentielle

C.1. Invariance temporelle

• Effectuons une translation temporelle, ou un changement d'origine des temps, sur une fonction périodique $s(t)$. Si nous appliquons cette translation à sa décomposition de Fourier nous avons :

$$s(t - \tau) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \{ a_n \cos[n\omega(t - \tau)] + b_n \sin[n\omega(t - \tau)] \}.$$

En développant :

$$\cos[n\omega(t - \tau)] = \cos(n\omega t) \cos(n\omega \tau) + \sin(n\omega t) \sin(n\omega \tau)$$

$$\sin[n\omega(t - \tau)] = \sin(n\omega t) \cos(n\omega \tau) - \cos(n\omega t) \sin(n\omega \tau)$$

et en reportant dans l'expression précédente nous obtenons :

$$s(t - \tau) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a'_n \cos(n\omega t) + b'_n \sin(n\omega t)]$$

avec :

$$\begin{cases} a'_n = a_n \cos(n\omega \tau) - b_n \sin(n\omega \tau) \\ b'_n = a_n \sin(n\omega \tau) + b_n \cos(n\omega \tau) \end{cases}$$

Les coefficients a_n et b_n de la décomposition de Fourier, telle que nous l'avons définie, ne sont pas invariants par translation temporelle. Il est alors délicat de leur donner une interprétation physique, puisqu'ils dépendent du choix, a priori arbitraire, de l'origine des temps.

• Par contre, nous avons vu que pour un signal sinusoïdal, l'amplitude est un invariant temporel et que seule la phase à l'origine est modifiée par une translation temporelle. Essayons donc d'écrire la décomposition de Fourier sous une autre forme faisant apparaître pour chaque harmonique une amplitude et une phase.

Quels que soient a et b réels, il est toujours possible de trouver c et φ réels tels que :

$$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = c \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{car :} \quad c \cos(\omega t + \varphi) = c [\cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi].$$

Par identification nous avons :

$$a = c \cos \varphi \quad \text{et} \quad b = -c \sin \varphi.$$

Nous pouvons choisir c positif (comme une amplitude), les quantités c et φ sont alors définies par :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Si nous appliquons ce résultat, nous pouvons réécrire la décomposition de Fourier d'une fonction périodique sous la forme suivante :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n).$$

Cette expression peut se généraliser comme :

$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n),$$

en choisissant par exemple :

$$c_0 = |a_0| \text{ et } \cos\varphi_0 = \text{signe}(a_0).$$

Vérifions que les coefficients c_n ainsi obtenus sont des invariants temporels :

$$s(t - \tau) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos[n\omega(t - \tau) + \varphi_n] = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi'_n),$$

avec : $\varphi'_n = \varphi_n - n\omega\tau$.

Une translation temporelle se traduit donc par une modification des phases du fondamental et des harmoniques. Les amplitudes restent inchangées.

Propriété 2

La décomposition en série de Fourier d'une fonction périodique peut également s'écrire sous la forme suivante :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n).$$

Les amplitudes des harmoniques c_n sont invariantes dans toute translation temporelle (ou changement d'origine temporelle).

C.2. Représentation fréquentielle

La décomposition de Fourier d'une fonction périodique $s(t)$ peut se résumer sous la forme de deux séries infinies de coefficients :

$$\{c_n\}_{n \geq 0} \text{ et } \{\varphi_n\}_{n \geq 0}.$$

Ces coefficients constituent le spectre de Fourier du signal $s(t)$. Ce spectre se décompose en un spectre d'amplitude $\{c_n\}_{n \geq 0}$ et un spectre de phase $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$. La connaissance des deux est indispensable pour reconstituer le signal $s(t)$.

Chacun de ces spectres peut être représenté graphiquement par un ensemble de raies verticales ayant chacune pour abscisse la valeur de la fréquence f_n de l'harmonique représenté et pour hauteur l'amplitude c_n ou la phase φ_n . Les deux représentations des spectres d'amplitude et de phase constituent la représentation fréquentielle du signal.

Définition 5

Le spectre de Fourier d'une fonction périodique est une représentation graphique des deux séries infinies de coefficients $\{c_n\}_{n \geq 0}$ et $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ de sa décomposition de Fourier.

La première série constitue le spectre d'amplitude et la seconde le spectre de phase.

Cette décomposition est analogue à l'analyse de la lumière à l'aide d'un prisme, c'est pourquoi l'analyse de Fourier d'un signal périodique est également appelée analyse spectrale.

La représentation de Fourier d'un signal sinusoïdal est extrêmement simple, chaque spectre ne comportant qu'une raie. Toujours par analogie avec les ondes lumineuses, un signal sinusoïdal est parfois qualifié de *monochromatique*, sa décomposition de Fourier se limitant au seul fondamental.

Application 2 Spectre de Fourier d'un créneau

Représenter le spectre d'amplitude du créneau dont la décomposition de Fourier a été déterminée dans l'application 1.

Solution

Nous avons trouvé pour la décomposition de Fourier le résultat suivant :

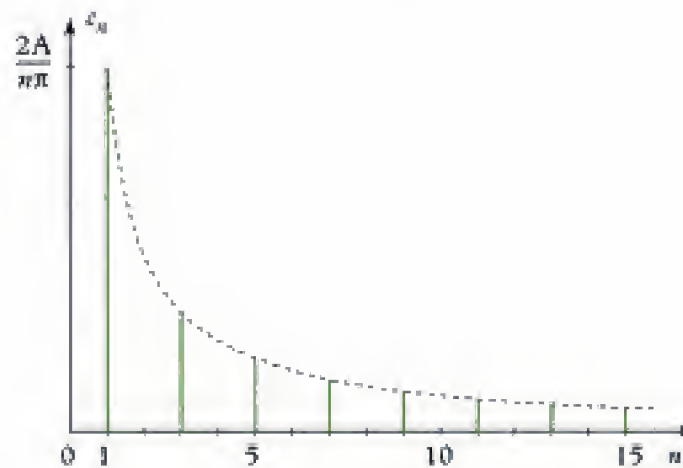
$$\begin{cases} a_0 = \frac{A}{2} & \text{et} & a_n = \frac{2A}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) & \forall n > 0 \\ b_n = 0 & \forall n > 0 \end{cases}$$

Nous pouvons calculer les coefficients c_n :

$$c_0 = |a_0| = \frac{A}{2}$$

et

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |a_n| \Rightarrow \begin{cases} c_n = 0 & \text{pour } n \text{ pair et non nul} \\ c_n = \frac{2A}{n\pi} & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$$



Le spectre d'amplitude recherché est tracé ci-dessus. Seuls les harmoniques impairs sont présents dans ce spectre. D'autre part, l'amplitude de ces harmoniques décroît en $\frac{1}{n}$ (courbe en tirets).

C.3. Valeur efficace et spectre de puissance

* Calculons, à partir de sa décomposition de Fourier, la valeur efficace S_{eff} d'un signal périodique $s(t)$. Par définition nous avons :

$$S_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt.$$

Élevons au carré la décomposition écrite sous la forme suivante :

$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

nous avons :

$$s^2(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 \cos^2(n\omega t + \varphi_n) + \sum_{n \neq m} c_n c_m \cos(n\omega t + \varphi_n) \cos(m\omega t + \varphi_m)$$

1. Car nous avons choisi $\cos \varphi_0 = \pm 1$.

Or¹ :

$$\frac{1}{T} \int_0^T c_0^2 \cos^2 \varphi_0 dt = c_0^2 \cos^2 \varphi_0 = c_0^2$$

$$\forall n > 0 \quad \int_0^T \cos^2(n\omega t + \varphi_n) dt = \int_0^T \frac{1 + \cos(2n\omega t + 2\varphi_n)}{2} dt = \frac{T}{2}$$

2. Même remarque qu'au paragraphe B.1. pour le calcul des relations d'orthogonalité.

et² :

$$\forall n \neq m, \quad \int_0^T \cos(n\omega t + \varphi_n) \cos(m\omega t + \varphi_m) dt = 0.$$

Cela nous permet de calculer la valeur efficace du signal périodique :

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{c_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n^2}{2}}.$$

Cette relation est appelée **égalité de Bessel-Parseval**.

Théorème 2

Le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal à la somme du carré de sa valeur moyenne et des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.

* Supposons que le signal étudié soit l'intensité $i(t)$ traversant une résistance R ou la tension $u(t)$ aux bornes de cette résistance. La puissance instantanée dissipée dans cette résistance peut s'écrire :

$$p(t) = Ri^2(t) = \frac{1}{R} u^2(t).$$

Nous pouvons donc relier la puissance moyenne P dissipée sur une période aux valeurs efficaces de l'intensité et de la tension :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = RI_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{R} U_{\text{eff}}^2.$$

À un facteur dimensionnel près (ici résistance ou conductance), le carré de la valeur efficace d'un signal est proportionnel à la puissance moyenne dissipée sur une période. Reprenons l'égalité de Bessel-Parseval :

$$S_{\text{eff}}^2 = c_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n^2}{2}.$$

Nous pouvons introduire une nouvelle série $\{p_n\}_{n \geq 0}$, appelée **densité spectrale de puissance**, définie par :

$$p_0 = c_0^2 \quad \text{et} \quad \forall n > 0, \quad p_n = \frac{c_n^2}{2} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}.$$

L'identité précédente s'écrit alors :

$$S_{\text{eff}}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n.$$

On appelle **spectre de puissance** la série $\{P_n\}_{n \geq 0}$ définie par :

$$P_n = \sum_{h=0}^n p_h.$$

D. Synthèse fréquentielle d'un signal périodique

En toute rigueur il faut un nombre infini d'harmoniques pour reconstituer un signal périodique à partir de sa série de Fourier. Cependant, en pratique, l'amplitude c_n des harmoniques décroît lorsque n augmente. Il est donc possible d'obtenir une approximation du signal en tronquant sa série de Fourier jusqu'à un certain rang. Les figures 2 et 3 illustrent la synthèse d'un créneau à partir d'une série de Fourier tronquée. La somme est limitée respectivement aux rangs 3 et 7. De manière évidente l'approximation s'améliore lorsque le nombre d'harmoniques pris en compte augmente. La synthèse d'un créneau nécessite cependant un nombre élevé d'harmoniques car il comporte deux discontinuités qui sont difficiles à reproduire avec des sinusoïdes.

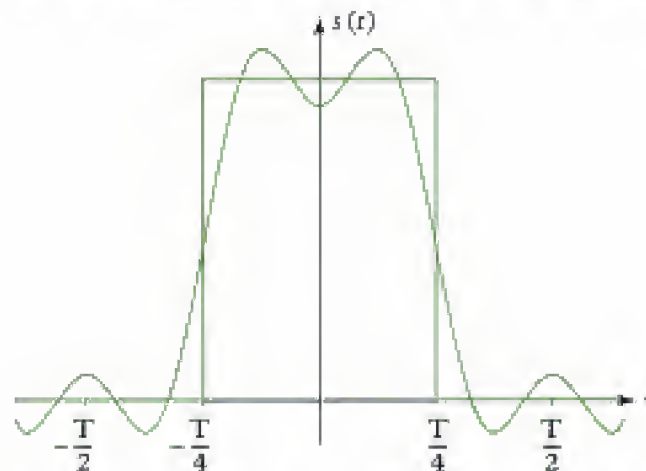


Fig. 2 - Synthèse d'un créneau en conservant jusqu'au deuxième harmonique.

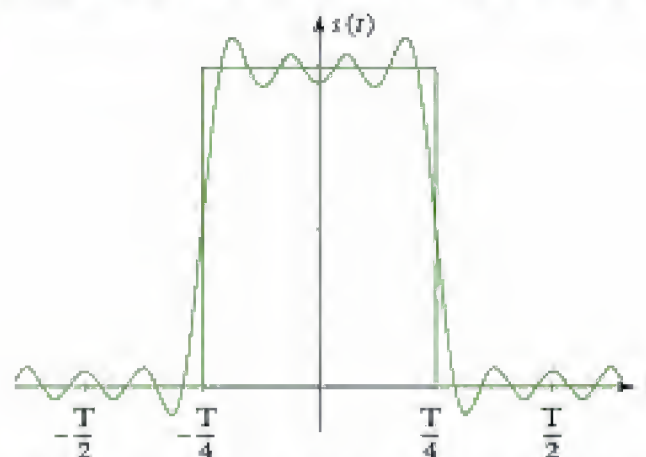


Fig. 3 - Synthèse d'un créneau en conservant jusqu'à l'harmonique de rang 7.

L'essentiel

✓ Théorème de Fourier

- Toute fonction réelle $s(t)$ périodique, de fréquence f , peut s'écrire sous la forme d'une **somme infinie de fonctions sinusoïdales** :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)], \text{ avec } \omega = 2\pi f.$$

Les coefficients a_n et b_n sont réels et peuvent être calculés à partir des expressions suivantes :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt \\ a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(n\omega t) dt \text{ et } b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(n\omega t) dt \end{cases}$$

La constante a_0 est appelée **composante continue** du signal périodique.

La fréquence $f_1 = f$ correspond au **fondamental**, ou premier harmonique ($n = 1$).

La fréquence $f_n = nf$ correspond à l'**harmonique d'ordre n** ($n > 1$).

- La décomposition en série de Fourier d'une fonction périodique peut également s'écrire sous la forme suivante :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

avec :

$$\begin{aligned} c_0 &= |a_0| \quad \text{et} \quad \cos \varphi_0 = \text{signe}(a_0) \\ c_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \cos \varphi_n = \frac{a_n}{c_n} \quad \text{et} \quad \sin \varphi_n = -\frac{b_n}{c_n}. \end{aligned}$$

Les amplitudes des harmoniques c_n sont invariantes dans toute translation temporelle (ou changement d'origine temporelle).

✓ Spectre de Fourier

Le **spectre de Fourier** d'une fonction périodique est une représentation graphique des deux séries infinies de coefficients $\{c_n\}_{n \geq 0}$ et $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ de sa décomposition de Fourier.

La première série constitue le **spectre d'amplitude** et la seconde le **spectre de phase**.

✓ Égalité de Bessel-Parseval

Le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal à la somme du carré de sa valeur moyenne et des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{c_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n^2}{2}}.$$

Mise en œuvre

Méthode n° 1

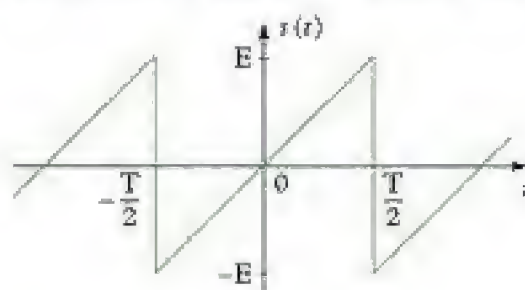
Comment calculer la décomposition de Fourier d'un signal périodique ?

→ Savoir faire

- 1 Rechercher des particularités du signal : symétries, parité, décalage en temps, décalage en amplitude, etc.
- 2 Selon les particularités du signal, choisir les bornes d'une période pour définir la fonction décrivant le signal et l'intégrer.
- 3 Calculer les intégrales donnant les coefficients a_n et b_n .
- 4 Éventuellement, à partir des coefficients a_n et b_n , calculer les amplitudes c_n et les phases φ_n .

→ Application

Calculer la décomposition de Fourier du signal périodique suivant, de période T et d'amplitude E :



Solution

- 1 Le signal est impair : il ne comporte donc que des termes en sinus.
- 2 Nous choisissons comme intervalle d'intégration la période $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$. Sur cet intervalle, nous pouvons écrire le signal sous la forme :

$$s(t) = \frac{2E}{T}t.$$

- 3 Nous pouvons calculer les coefficients b_n :

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2E}{T} t \sin(n\omega t) dt = \frac{4E}{T^2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t \sin(n\omega t) dt.$$

Intégrons par partie :

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t \sin(n\omega t) dt = \left[-t \frac{\cos(n\omega t)}{n\omega} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{\cos(n\omega t)}{n\omega} dt.$$

L'intégrale de la fonction $\cos(n\omega t)$ sur n périodes entières est nulle. Il nous reste donc :

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t \sin(n\omega t) dt = \left[-t \frac{\cos(n\omega t)}{n\omega} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = -\frac{T}{2} \frac{\cos\left(n\omega \frac{T}{2}\right)}{n\omega} - \frac{T}{2} \frac{\cos\left(-n\omega \frac{T}{2}\right)}{n\omega} = -T \frac{\cos(n\pi)}{n\omega}.$$

Nous avons donc pour b_n :

$$b_n = \frac{4E}{T^2} \times \left[-T \frac{\cos(n\pi)}{n\omega} \right] = -4E \frac{\cos(n\pi)}{n\omega T} = -2E \frac{\cos(n\pi)}{n\pi}.$$

La décomposition de Fourier du signal $s(t)$ s'écrit donc :

$$s(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} -2E \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} \sin(n\omega t) \quad \text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

❶ Nous avons :

$$c_0 = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_0 = 0$$

et :

$$c_n = |b_n| = \frac{2E}{n\pi} \quad \text{et} \quad \varphi_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{pour } n \text{ pair} \\ -\frac{\pi}{2} & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$$

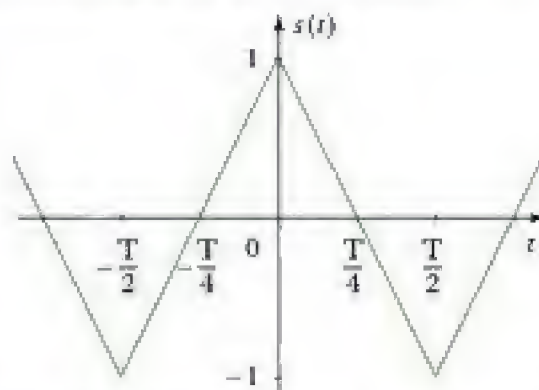
car $-\cos(n\pi) = (-1)^{n+1}$ et $\sin \varphi_n = (-1)^{n+2} = (-1)^n$.

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Décomposition de Fourier d'un signal en dents de scie

On considère un signal en dents de scie, de période T tel que schématisé sur la figure suivante.



Calculer les coefficients a_n , b_n , c_n et φ_n de sa décomposition de Fourier.

Ex. 2 Étude d'un signal à partir de son spectre

On donne la série de Fourier d'un signal carré représentant une tension :

$$e(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi} \cos[(2n+1)10^2 t].$$

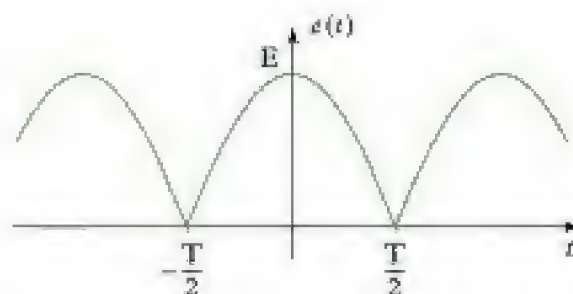
On ne tient compte que des 5 premiers harmoniques non nuls.

- 1) Tracer le spectre du signal carré.
- 2) Pour recomposer ce signal, on utilise ces 5 premiers harmoniques.
 - a) En ne tenant compte que du spectre d'amplitude, déterminer le signal recomposé.
 - b) En tenant compte du spectre d'amplitude et du spectre phase, déterminer le signal recomposé.
 - c) Conclure.

Niveau 2

Ex. 3 Décomposition de Fourier d'un signal sinusoïdal redressé

On considère un signal sinusoïdal redressé, de période T et d'amplitude E , tel que schématisé sur la figure suivante.



Déterminer la décomposition spectrale de ce signal.

Ex. 4 Modulation

On désire transmettre un signal avec information $i(t)$ par un signal porteur $p(t)$.

Pour cela, on utilise un dispositif émettant le signal suivant :

$$s(t) = [C + i(t)] p(t).$$

La porteuse est un signal sinusoïdal :

$$p(t) = P \cos(\Omega t).$$

Pour l'information nous choisissons également un signal sinusoïdal :

$$i(t) = I \cos(\omega t).$$

La pulsation de la porteuse est choisie très grande devant celle de l'information ($\Omega \gg \omega$).

a) Exprimer $s(t)$ sous la forme :

$$s(t) = A(1 + m \cos(\omega t)) \cos(\Omega t).$$

Le paramètre m est appelé taux de modulation.

b) Décomposer en série de Fourier le signal $s(t)$ et représenter son spectre d'amplitude. Quelles raies portent de l'information ?

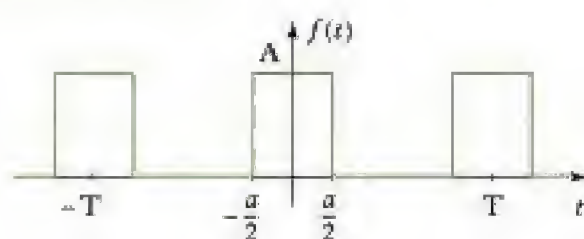
c) Calculer le spectre de puissance du signal $s(t)$.

d) Calculer la fraction utile de puissance transportée. Pour quelle valeur de m cette fraction utile est-elle maximale ? Commenter.

Niveau 3

Ex. 5 Décomposition de Fourier d'un créneau

On considère un créneau d'amplitude A , de période T et de rapport cyclique α ($0 < \alpha < 1$). Un tel signal est une succession périodique d'impulsions rectangulaires de hauteur A et de largeur a telle que $a = \alpha T$. Pour simplifier les calculs nous choisissons une origine des temps telle que ce signal soit décrit par une fonction $f(t)$ paire.



- Calculer les coefficients a_n et b_n .
- Représenter le spectre de Fourier de ce signal périodique pour $\alpha = 0,3$.
- Déterminer et représenter la densité spectrale de puissance du créneau et son spectre de puissance pour $\alpha = 0,3$.

Indications

Ex. 3 Remarquer que le signal est pair et le décrire sur la période $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

Ex. 4 b) Ne pas chercher à décomposer le signal $s(t)$ en utilisant les formules générales donnant les coefficients a_n et b_n . Un peu de trigonométrie suffit.

Ex. 5 b) On fera apparaître la fonction sinus cardinal définie par :

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1



On applique la méthode n° 1.

Le signal est une fonction paire et de valeur moyenne nulle ($a_0 = 0$), sa décomposition en série de Fourier ne comporte donc que des termes en cosinus. Pour calculer les coefficients a_n , nous choisissons un intervalle d'intégration symétrique par rapport à 0 : $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$. Nous avons alors :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt, \text{ avec } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Sur cet intervalle nous pouvons écrire la fonction $f(t)$ décrivant le signal sous la forme :

$$\begin{cases} f(t) = 1 + 4 \frac{t}{T} & \text{pour } t \in \left[-\frac{T}{2}, 0\right] \\ f(t) = 1 - 4 \frac{t}{T} & \text{pour } t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]. \end{cases}$$

Ce qui nous donne : $a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 \left(1 + 4 \frac{t}{T}\right) \cos(n\omega t) dt + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(1 - 4 \frac{t}{T}\right) \cos(n\omega t) dt.$

Soit : $a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega t) dt + \frac{8}{T^2} \int_{-\frac{T}{2}}^0 t \cos(n\omega t) dt - \frac{8}{T^2} \int_0^{\frac{T}{2}} t \cos(n\omega t) dt.$

Le premier terme (intégrale d'une sinusoïde sur une période) est nul. Comme la fonction $t \cos(n\omega t)$ est impaire, nous pouvons écrire, en effectuant un changement de variable ($u = -t$) dans le troisième terme :

$$a_n = \frac{8}{T^2} \int_{-\frac{T}{2}}^0 t \cos(n\omega t) dt - \frac{8}{T^2} \int_0^{\frac{T}{2}} u \cos(n\omega u) du.$$

Ce qui nous donne : $a_n = \frac{16}{T^2} \int_{-\frac{T}{2}}^0 t \cos(n\omega t) dt.$

Intégrons par partie : $\int_{-\frac{T}{2}}^0 t \cos(n\omega t) dt = \left[t \frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} \right]_{-\frac{T}{2}}^0 - \int_{-\frac{T}{2}}^0 \frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} dt.$

Soit : $\int_{-\frac{T}{2}}^0 t \cos(n\omega t) dt = -\frac{T}{2} \frac{\sin\left(n\omega \frac{T}{2}\right)}{n\omega} + \left[\frac{\cos(n\omega t)}{(n\omega)^2} \right]_{-\frac{T}{2}}^0.$

Et : $\int_{-\frac{T}{2}}^0 t \cos(n\omega t) dt = -\frac{T}{2} \frac{\sin\left(n\omega \frac{T}{2}\right)}{n\omega} + \frac{1 - \cos\left(n\omega \frac{T}{2}\right)}{(n\omega)^2}.$

Or $\omega \frac{T}{2} = \pi$, donc :

$$\int_{-\frac{T}{2}}^0 t \cos(n\omega t) dt = \frac{1}{(n\omega)^2} [1 - \cos(n\pi)]$$

ce qui nous donne pour les coefficients a_n :

$$a_n = \frac{16}{(n\omega T)^2} [1 - \cos(n\pi)] = \frac{4}{(n\pi)^2} [1 - \cos(n\pi)],$$

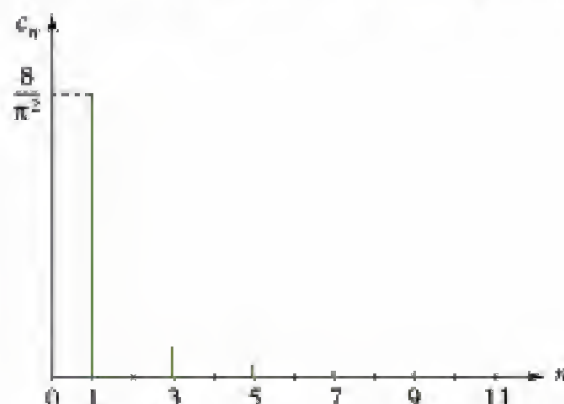
soit encore :

$$\begin{cases} a_n = 0 & \text{pour } n \text{ pair} \\ a_n = \frac{8}{(n\pi)^2} & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$$

La fonction étant paire : $b_n = 0$. Comme tous les coefficients a_n sont positifs, nous avons pour les spectres d'amplitude et de phase :

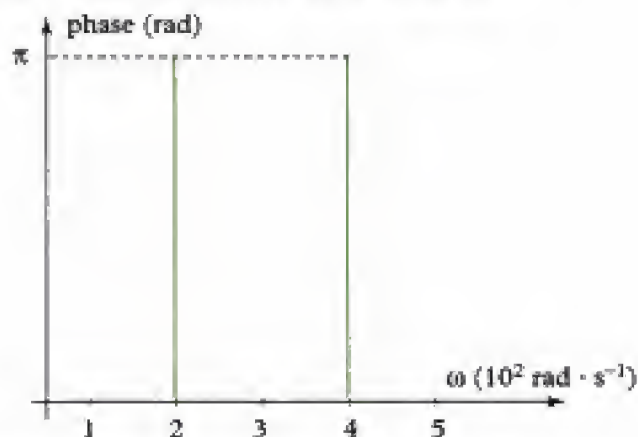
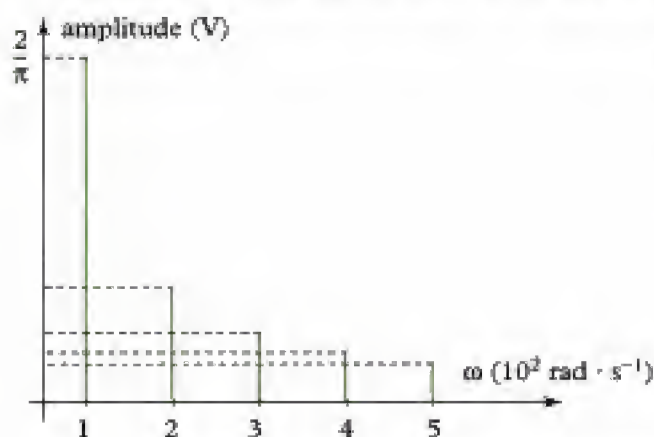
$$c_n = a_n \quad \text{et} \quad \varphi_n = 0.$$

La figure suivante représente le spectre d'amplitude de la décomposition d'un signal triangulaire.



Exercice 2

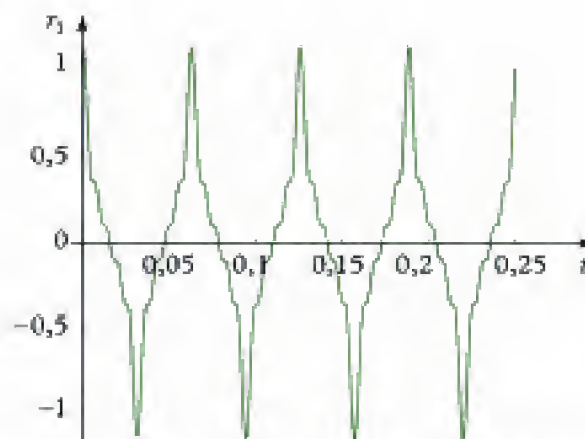
1) On représente les spectres d'amplitude et de phase en fonction de la pulsation ou de la fréquence. Pour raisons de simplicité, on effectue ici une représentation en fonction de la pulsation.



2) a) En ne tenant compte que du spectre d'amplitude, le signal temporel recomposé est :

$$r_1(t) = \frac{2}{\pi} \cos(10^2 t) + \frac{2}{3\pi} \cos(3 \cdot 10^2 t) + \frac{2}{5\pi} \cos(5 \cdot 10^2 t) + \frac{2}{7\pi} \cos(7 \cdot 10^2 t) + \frac{2}{9\pi} \cos(9 \cdot 10^2 t).$$

L'allure de ce signal est :

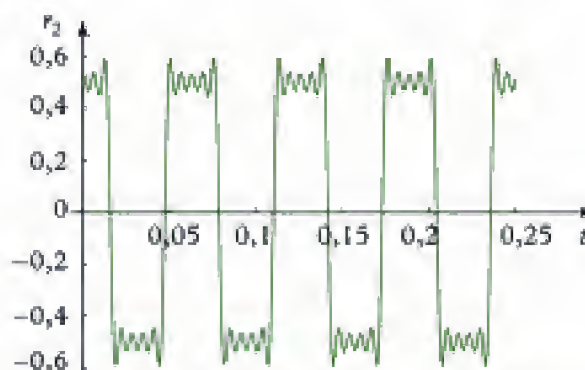


b) En tenant compte des spectres d'amplitude et de phase, le signal temporel recomposé est :

$$r_2(t) = \frac{2}{\pi} \cos(10^2 t) + \frac{2}{3\pi} \cos(3 \cdot 10^2 t + \pi) + \frac{2}{5\pi} \cos(5 \cdot 10^2 t) + \frac{2}{7\pi} \cos(7 \cdot 10^2 t + \pi) + \frac{2}{9\pi} \cos(9 \cdot 10^2 t)$$

$$\text{soit : } r_2(t) = \frac{2}{\pi} \cos(10^2 t) - \frac{2}{3\pi} \cos(3 \cdot 10^2 t) + \frac{2}{5\pi} \cos(5 \cdot 10^2 t) - \frac{2}{7\pi} \cos(7 \cdot 10^2 t) + \frac{2}{9\pi} \cos(9 \cdot 10^2 t).$$

L'allure de ce signal est alors :



c) Le signal recomposé à partir d'amplitude ne ressemble pas du tout au signal carré de départ. Par contre, le signal recomposé à partir des spectres d'amplitude et de phase est bien similaire à un signal carré. Il faudrait simplement prendre plus d'harmoniques pour obtenir un carré parfait.

Cet exemple montre l'importance du spectre de phase qui est souvent négligé dans les études spectrales et qui pourtant a une incidence importante sur l'allure du signal temporel dans de nombreux cas.

Exercices de niveau 2

Exercice 3

Le signal sinusoïdal redressé, tel que représenté sur la figure donnée par l'énoncé, peut s'écrire sur la période $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$:

$$e(t) = E \cos(\omega t), \quad \text{avec } \omega = \frac{\pi}{T}.$$

À partir de cette expression, nous pouvons calculer les divers termes de la décomposition de Fourier du signal. Calculons la composante continue du signal $e(t)$:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E \cos(\omega t) dt = \frac{E}{T} \left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{2E \sin\left(\omega \frac{T}{2}\right)}{\omega T} = \frac{2E \sin \frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{2E}{\pi}.$$



! Ici $\omega T = \pi$!

Il s'agit d'un signal pair, il ne comporte donc que des termes en cosinus, dont nous pouvons calculer les amplitudes :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E \cos(\omega t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2E}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{\cos((n+1)\omega t) + \cos((n-1)\omega t)}{2} dt,$$

soit :

$$a_n = \frac{E}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos((n+1)\omega t) dt + \frac{E}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos((n-1)\omega t) dt,$$

ce qui nous donne :

$$a_n = \frac{E}{T} \left[\frac{\sin((n+1)\omega t)}{(n+1)\omega} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{E}{T} \left[\frac{\sin((n-1)\omega t)}{(n-1)\omega} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}},$$

soit encore :

$$a_n = \frac{E}{T} \frac{2 \sin\left((n+1)\omega \frac{T}{2}\right)}{(n+1)\omega} + \frac{E}{T} \frac{2 \sin\left((n-1)\omega \frac{T}{2}\right)}{(n-1)\omega} = \frac{2E \sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)\pi} + \frac{2E \sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n-1)\pi}.$$

Ces coefficients dépendent de la parité de n :

$$\begin{cases} \sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k \text{ pour } n = 2k \\ \sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ pour } n = 2k+1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k+1} \text{ pour } n = 2k \\ \sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ pour } n = 2k+1. \end{cases}$$

Les termes de rang impair sont donc nuls. Pour les rangs pairs nous avons :

$$a_{2k} = \frac{2E(-1)^k}{(2k+1)\pi} + \frac{2E(-1)^{k+1}}{(2k-1)\pi} = \frac{2E(-1)^k}{\pi} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1} \right),$$

soit :

$$a_{2k} = \frac{2E(-1)^k}{\pi} \times \frac{(2k-1) - (2k+1)}{(2k+1)(2k-1)} = \frac{2E(-1)^k}{\pi} \times \frac{-2}{4k^2-1}.$$

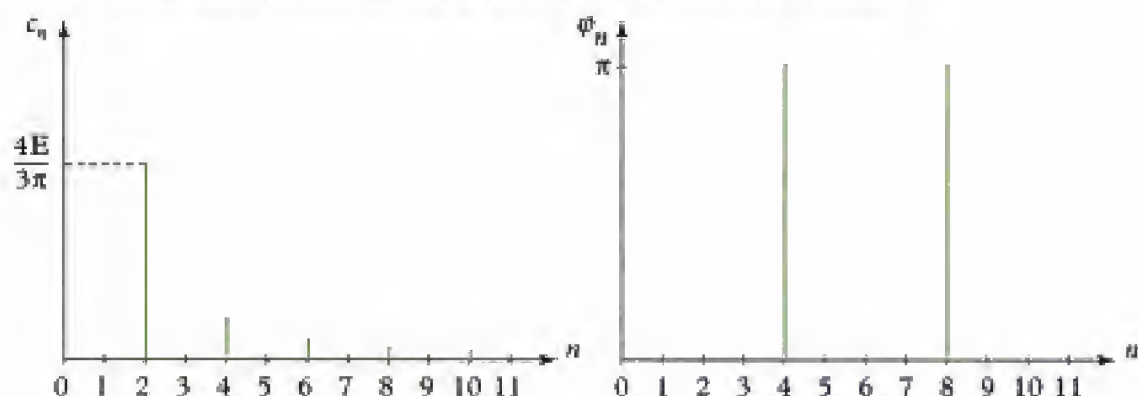
Nous avons donc :

$$a_{2k} = \frac{4E(-1)^{k+1}}{(4k^2-1)\pi} \quad \text{et} \quad a_{2k+1} = 0$$

Nous avons donc pour les spectres d'amplitude et de phase :

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{2E}{\pi}, \quad c_{2k} = \frac{4E}{(4k^2-1)\pi} \quad \text{et} \quad c_{2k+1} = 0 \\ \varphi_0 &= 0, \quad \varphi_{2k} \equiv (k+1)\pi \quad (2\pi) \quad \text{et} \quad \varphi_{2k+1} = 0 \end{aligned}$$

Les deux figures suivantes présentent les spectres d'amplitude et de phase :



Exercice 4

a) Mise en forme du signal modulé :

$$s(t) = [C + i(t)]p(t) = (C + I\cos(\omega t))P\cos(\Omega t) = PC\left(1 + \frac{I}{C}\cos(\omega t)\right)\cos(\Omega t).$$

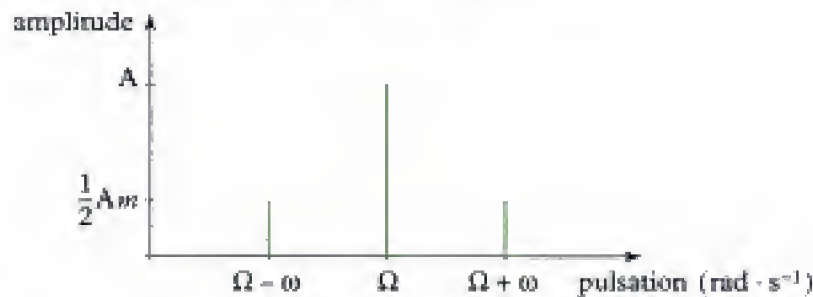
Donc : $s(t) = A(1 + m\cos(\omega t))\cos(\Omega t)$, avec $A = PC$ et $m = \frac{I}{C}$.

b) Il suffit d'un peu de trigonométrie :

$$s(t) = A(1 + m\cos(\omega t))\cos(\Omega t) = A\cos(\Omega t) + Am\cos(\omega t)\cos(\Omega t)$$

$$s(t) = A\cos(\Omega t) + Am\frac{\cos((\Omega + \omega)t) + \cos((\Omega - \omega)t)}{2}.$$

Le spectre d'amplitude ne comporte donc que trois raies aux pulsations $\Omega - \omega$, Ω et $\Omega + \omega$. Elles ont respectivement pour amplitude : $\frac{1}{2}Am$, A et $\frac{1}{2}Am$.



Les raies qui transportent de l'information doivent être reliées à la pulsation ω du signal $i(t)$. Ce sont donc les deux raies de pulsations $\Omega - \omega$ et $\Omega + \omega$.

c) Le spectre de puissance est tel que pour chaque harmonique nous avons :

$$\forall n > 0, \quad p_n = \frac{c_n^2}{2} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}.$$

C'est-à-dire qu'ici le spectre de puissance comporte trois raies aux pulsations $\Omega - \omega$, Ω et $\Omega + \omega$, avec respectivement : $\frac{1}{8}A^2m^2$, $\frac{1}{2}A^2$ et $\frac{1}{8}A^2m^2$.

La puissance totale transportée est la somme de ces trois raies donc :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{8}A^2m^2 + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{8}A^2m^2 \text{ soit : } \boxed{\mathcal{P} = \frac{1}{2}A^2\left(1 + \frac{1}{2}m^2\right)}$$

d) La puissance utile correspond à la puissance des deux raies portant de l'information :

$$\mathcal{P}_u = \frac{1}{4}A^2m^2.$$

La fraction utile de la puissance transportée par le signal est donc :

$$f_u = \frac{\frac{1}{4}A^2m^2}{\frac{1}{2}A^2\left(1 + \frac{1}{2}m^2\right)} = \frac{m^2}{2 + m^2}.$$

Dérivons cette quantité par rapport à m :

$$\frac{df_u}{dm} = \frac{2m(2 + m^2) - 2mm^2}{(2 + m^2)^2} = \frac{4m}{(2 + m^2)^2}.$$

La fraction utile de puissance transportée par le signal est donc une fonction croissante de m . L'optimum ($f_u = 1$) est obtenu pour m infini, c'est-à-dire $C = 0$. Dans ce cas, A est également nul et le spectre de puissance ne comporte que les raies portant l'information aux pulsations $\Omega - \omega$ et $\Omega + \omega$. Elles transportent chacune : $\frac{1}{8}A^2m^2 = \frac{1}{8}P^2I^2$.

Exercices de niveau 3

Exercice 5

a)



On applique la méthode n° 1.

Pour le calcul des coefficients a_n et b_n nous choisissons la période centrée sur 0 : $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

• Commençons par calculer la valeur moyenne a_0 du signal :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} A dt = \frac{aA}{T} = \alpha A.$$



Comme nous pouvions le deviner, la valeur moyenne du signal est donc égale au produit du rapport cyclique et de l'amplitude.

La fréquence f et la pulsation ω du fondamental sont :

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

• Calculons les coefficients a_n pour $n > 0$; nous avons :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} A \cos(n\omega t) dt = \frac{2A}{T} \left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}$$

ce qui nous donne :

$$a_n = \frac{4A}{T} \frac{\sin\left(\frac{n\omega a}{2}\right)}{n\omega}.$$

En se souvenant que $\omega T = 2\pi$, il vient :

$$a_n = \frac{2A}{n\pi} \sin\left(\frac{n\omega a}{2}\right)$$

• Calculons les coefficients b_n :

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} A \sin(n\omega t) dt = \frac{2A}{T} \left[-\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = 0.$$

Les coefficients b_n sont donc nuls, ce que nous aurions pu énoncer sans calcul puisque la fonction représentant le signal est paire.

b) La largeur de l'impulsion a est liée à la période du créneau par le rapport cyclique :

$$a = \alpha T \Rightarrow \frac{n\omega a}{2} = \frac{n\omega \alpha T}{2} = \frac{n\alpha 2\pi}{2} = n\alpha\pi.$$

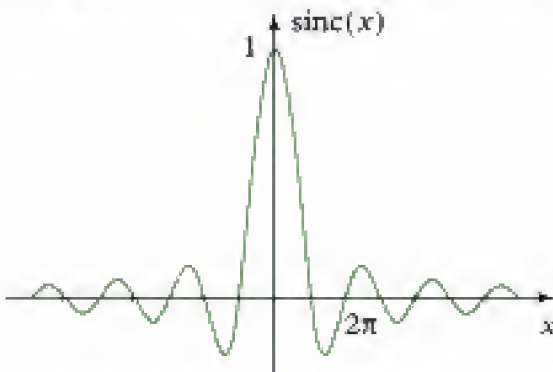
Nous pouvons donc réécrire les coefficients a_n pour $n > 0$:

$$a_n = 2\alpha A \frac{\sin(n\alpha\pi)}{n\alpha\pi} = 2\alpha A \text{sinc}(n\alpha\pi)$$

où sinc représente la fonction sinus cardinal défini comme :

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Il s'agit d'une fonction de pseudo-période 2π dont nous rappelons l'allure sur la figure suivante :



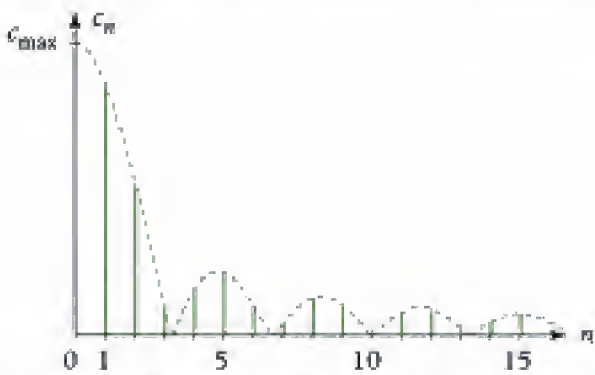
Déterminons maintenant les spectres d'amplitude et de phase du créneau. Il nous faut donc calculer les coefficients c_n et φ_n . Pour les amplitudes, nous prenons :

$$c_0 = \alpha A \text{ et } c_n = 2\alpha A |\text{sinc}(n\alpha\pi)|.$$

Les phases sont alors :

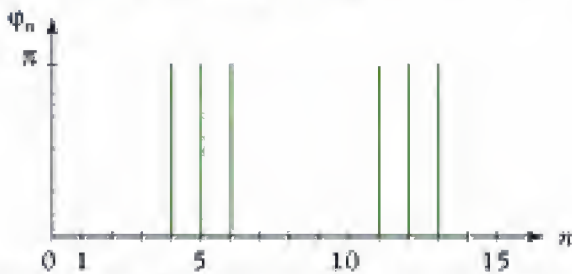
$$\begin{cases} \varphi_0 = 0 \\ \varphi_n = 0 \quad \text{si } \text{sinc}(n\alpha\pi) \geq 0 \\ \varphi_n = \pi \quad \text{si } \text{sinc}(n\alpha\pi) < 0 \end{cases}$$

Le spectre d'amplitude d'un créneau de rapport cyclique $\alpha = 0,3$ est présenté sur la figure suivante (la courbe en pointillés représente la valeur absolue de la fonction sinus cardinal, avec $c_{\max} = 2\alpha A$).



Spectre d'amplitude d'un créneau de rapport cyclique $\alpha = 0,3$.

La figure suivante représente le spectre de phase correspondant, les raies présentent (lobes impaires de la fonction sinus cardinal) ont toutes pour phase π .

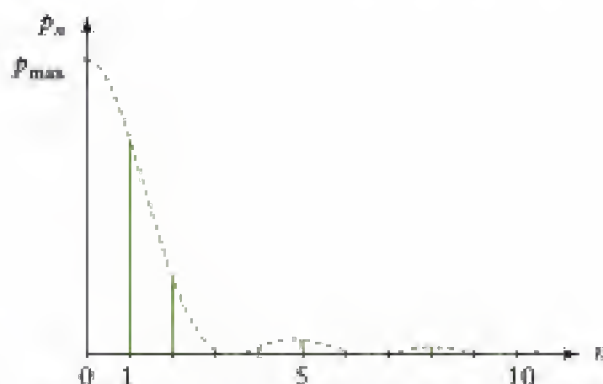


Spectre de phase d'un créneau de rapport cyclique $\alpha = 0,3$.

c) À partir des coefficients c_n nous pouvons calculer les termes de la densité spectrale de puissance :

$$p_0 = c_0^2 = \alpha^2 A^2 \quad \text{et} \quad p_n = \frac{c_n^2}{2} = 2\alpha^2 A^2 \text{sinc}^2(n\alpha\pi).$$

Cette densité spectrale est représentée sur la figure suivante (la courbe en pointillé représente $\text{sinc}^2(0,3n\pi)$ avec $p_{\max} = 2\alpha^2 A^2$).



Densité spectrale de puissance d'un créneau de rapport cyclique $\alpha = 0,3$.

En additionnant de proche en proche les raies de la densité spectrale nous obtenons le spectre de puissance :

$$P_0 = p_0$$

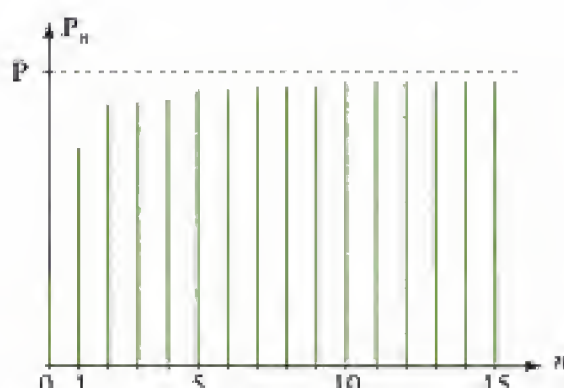
$$P_1 = p_0 + p_1$$

$$P_2 = p_0 + p_1 + p_2 = P_1 + p_2$$

$$P_3 = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = P_2 + p_3$$

...

Sur la figure suivante nous avons représenté le spectre de puissance correspondant, intégré jusqu'au 15^e harmonique.



Spectre de puissance d'un créneau de rapport cyclique $\alpha = 0,3$.

Nous pouvons calculer la valeur limite de ce spectre de puissance :

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} A^2 dt = \frac{a}{T} A^2 = \alpha A^2.$$

La ligne horizontale en pointillé sur la figure précédente représente cette limite.

*Filtres du second ordre***Introduction**

Ce chapitre complète l'étude de première année sur les filtres du premier ordre. Il présente l'étude des diagrammes de Bode des différents filtres du second ordre.

Plan du chapitre 2

A. Présentation	30
1. Définition d'un filtre	30
2. Bande passante et bande coupée	30
3. Filtre du second ordre	30
4. Diagramme de Bode	31
5. Vocabulaire	33
B. Filtre passe-bas du second ordre	33
1. Fonction de transfert	33
2. Étude du diagramme de Bode du gain	34
3. Étude du diagramme de Bode de la phase	35
4. Bande passante	36
C. Filtre passe-haut du second ordre	37
D. Filtre passe-bande du second ordre	40
E. Filtre coupe-bande du second ordre	44
F. Étude du cas où $Q < \frac{1}{2}$	47
1. Fonction de transfert	47
2. Cas d'un passe-bas	47
3. Cas d'un passe-bande	48
G. Étude d'un filtre	48
1. Détermination du type d'un filtre	48
2. Détermination de la fréquence propre	50
3. Diagrammes de Bode	50
Méthodes	52
Exercices	58

A. Présentation

Ce paragraphe introduit les éléments de base du filtrage et le vocabulaire associé.

A.1. Définition d'un filtre

Dans un premier temps, il est important de rappeler la définition d'un filtre.

Définition 1

Un **filtre** est un circuit électrique permettant de réaliser un filtrage.

Le filtrage est l'opération qui consiste à séparer les composantes d'un signal selon leur fréquence¹.

Nous distinguons les filtres passifs constitués uniquement d'éléments passifs (résistor, condensateur, bobine) et les filtres actifs constitués d'éléments passifs et actifs (amplificateur opérationnel par exemple).

Cette définition fait apparaître la nécessité d'une étude des caractéristiques du filtre en fonction de la fréquence.

A.2. Bande passante et bande coupée

Un filtre est caractérisé par un certain comportement en fonction de la fréquence du signal à l'entrée. On définit alors deux caractéristiques importantes du filtre : la bande passante et la bande coupée.²

Définition 2

Une **bande passante** est un intervalle de fréquence dans lequel le gain du filtre varie peu et est le plus élevé.

Définition 3

Une **bande coupée** est un intervalle de fréquence dans lequel le gain du filtre est « faible ».

A.3. Filtre du second ordre

L'étude d'un filtre s'effectue à partir de sa fonction de transfert³. L'ordre d'un filtre correspond alors au degré du polynôme en ω au dénominateur de la fonction de transfert du filtre.

Propriété 1

Un filtre du second ordre possède une **fonction de transfert** de la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\alpha + j\beta\omega - \gamma\omega^2}{1 + ja\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

où ω est la pulsation du signal d'entrée et où $a, \omega_0, \alpha, \beta, \gamma$ sont des constantes.

On pose parfois $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ une variable réduite qui permet d'écrire la fonction de transfert sous la forme :

$$\frac{\alpha' + j\beta'x - \gamma'x^2}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$$

1. Il est important de remarquer que le déphasage du signal de sortie par rapport au signal d'entrée n'intervient pas dans la définition du filtre. Cependant, suivant le type d'application, il sera parfois nécessaire d'y prêter attention pour le bon fonctionnement du système électrique dans lequel le filtre est inséré. En effet, le déphasage du signal de sortie du filtre influe sur la réponse du montage dans lequel il est inséré. Il est donc essentiel de ne pas oublier que l'étude d'un filtre, c'est non seulement l'étude de son amplification, mais aussi celle de son déphasage.

2. Dans le domaine industriel, ces définitions permettent de déterminer ce que l'on appelle le gabarit du filtre. Ce gabarit définit les intervalles de fréquences correspondant à la bande coupée et à la bande passante du filtre ainsi que l'amplification minimale en bande passante et l'amplification maximale en bande coupée. Des techniques diverses permettent alors de déterminer le schéma électronique du filtre adéquat.

3. La fonction de transfert est le rapport de la tension de sortie sur la tension d'entrée du filtre en notation complexe :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

Propriété 2

Pour un **filtre du second ordre**, la fonction de transfert s'écrit sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\alpha' + j\beta'x - \gamma'x^2}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}, \text{ où } x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

ω_0 est la pulsation propre du filtre et Q le coefficient de qualité du filtre.

Dans la suite du chapitre, nous allons étudier les quatre types de filtres du second ordre qui peuvent être rencontrés. Cette étude s'effectue en fonction de la fréquence en utilisant les diagrammes de Bode.

A.4. Diagramme de Bode

L'étude d'un filtre s'effectue en fonction de la fréquence. Elle est réalisée grâce au diagramme de Bode qui représente l'évolution des caractéristiques amplification¹ et déphasage du filtre en fonction de la fréquence.

Définition 4

Le **diagramme de Bode** d'un filtre est constitué de deux courbes : le **gain** (module de la fonction de transfert en dB) et la **phase** (argument de la fonction de transfert) en fonction de la fréquence ou de la pulsation en échelle logarithmique, c'est-à-dire en fonction de $\log(f)$ ou $\log(\omega)$.

1. On appelle amplification le module de la fonction de transfert et gain le module de la fonction de transfert exprimée en décibels :

$$G = 20\log|\underline{H}(j\omega)|$$

Le terme d'amplification est ici utilisé même pour $|\underline{H}(j\omega)| < 1$.

2. Ce terme provient du vocabulaire musical. En effet, lorsque l'on multiplie par deux la fréquence d'une note, on la monte d'une octave (8 notes).

• Diagramme de Bode du gain

On y définit la pente des asymptotes du diagramme de Bode du gain en dB par octave ou dB par décade.

Une octave² correspond à l'intervalle de fréquence entre deux fréquences f_1 et f_2 telles que $f_1 = 2f_2$. Par exemple, entre 100 Hz et 200 Hz ou 300 Hz et 600 Hz ou 8 kHz et 16 kHz, il y a une octave.

Une décade correspond à l'intervalle de fréquence entre deux fréquences f_1 et f_2 telles que $f_1 = 10f_2$. Par exemple, entre 100 Hz et 1 kHz ou 30 Hz et 300 Hz ou 8 kHz et 80 kHz, il y a une décade.

• Diagramme de Bode de la phase

Pour les systèmes du premier ou du second ordre, nous considérons que la phase est comprise entre $-\pi$ et π .

Lorsque le déphasage du signal de sortie par rapport au signal d'entrée est négatif, on dit que le signal de sortie est en retard de phase (le signal de sortie passe par zéro après le signal d'entrée).

Lorsque le déphasage du signal de sortie par rapport au signal d'entrée est positif, on dit que le signal de sortie est en avance de phase (le signal de sortie passe par zéro avant le signal d'entrée).

Si le déphasage est de $+\frac{\pi}{2}$, on parle de quadrature avance ou retard.

Si le déphasage est de π , on parle d'opposition de phase.

• Diagramme de Bode d'un produit de fonctions de transfert

Propriété 3

Le diagramme de Bode du produit de deux fonctions de transfert est la **somme des diagrammes de Bode** pour chaque fonction de transfert.

En effet, si on peut écrire $\underline{H}(j\omega) = \underline{H}_1(j\omega) \times \underline{H}_2(j\omega)$, on a :

$$20\log|\underline{H}(j\omega)| = 20\log|\underline{H}_1(j\omega)| + 20\log|\underline{H}_2(j\omega)|.$$

De plus, $\text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = \text{Arg}(\underline{H}_1(j\omega)) + \text{Arg}(\underline{H}_2(j\omega))$.

Donc les diagrammes de Bode s'additionnent.

Application 1 Diagramme de Bode asymptotique

Tracer le diagramme de Bode asymptotique pour :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1 + j\tau_1\omega}{1 + j\tau_2\omega}, \text{ où } \tau_1 = 10^{-2} \text{ s et } \tau_2 = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ s.}$$

Solution

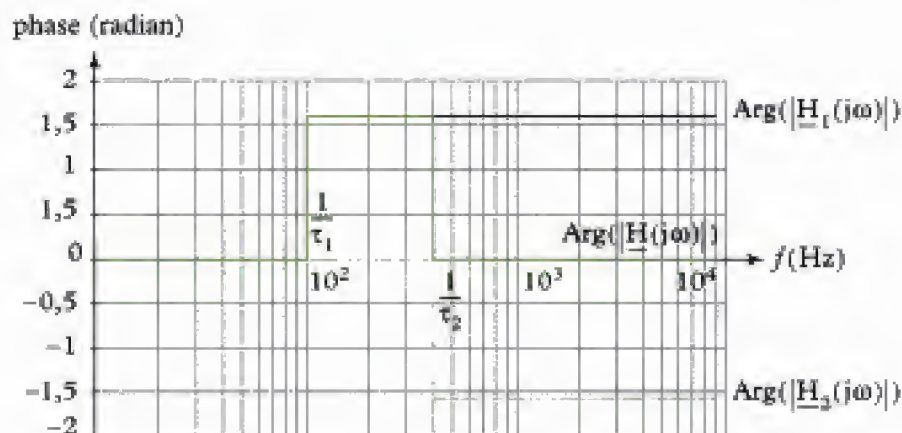
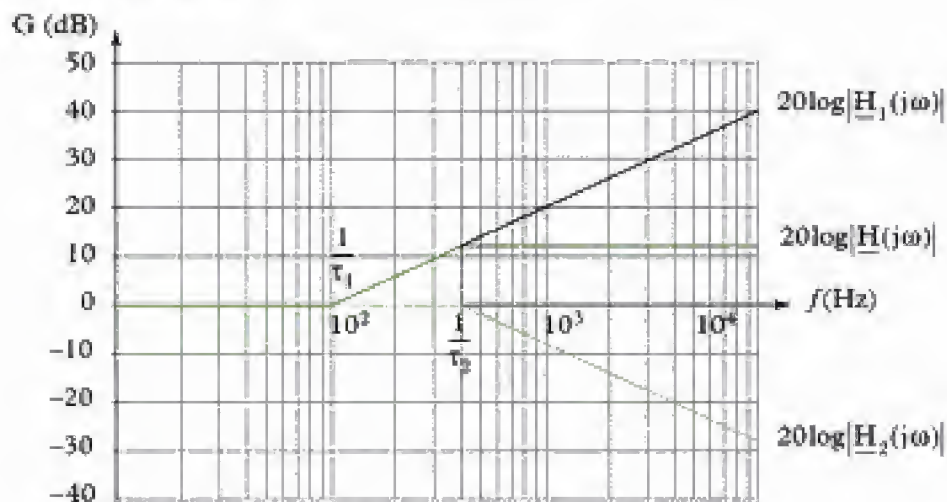
Le diagramme de Bode asymptotique pour $\underline{H}(j\omega) = \frac{1 + j\tau_1\omega}{1 + j\tau_2\omega}$ est la somme du diagramme asymptotique pour $\underline{H}_1(j\omega) = 1 + j\tau_1\omega$ et $\underline{H}_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j\tau_2\omega}$.

Lorsque $\omega \rightarrow 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $G_1 \rightarrow 0 \text{ dB}$, $G_2 \rightarrow 0 \text{ dB}$, $\text{Arg}(\underline{H}_1(j\omega)) \rightarrow 0 \text{ rad}$ et $\text{Arg}(\underline{H}_2(j\omega)) \rightarrow 0 \text{ rad}$.

Lorsque $\omega \rightarrow \infty$, $G_1 \rightarrow 20\log(\tau_1) + 20\log(\omega)$ et $G_2 \rightarrow -20\log(\tau_2) - 20\log(\omega)$,

$$\text{Arg}(\underline{H}_1(j\omega)) \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ rad et } \text{Arg}(\underline{H}_2(j\omega)) \rightarrow -\frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

Les tracés asymptotiques sont alors :



A.5. Vocabulaire

Enfin, terminons cette introduction par quelques notions de vocabulaire qui seront reprises dans l'étude des filtres.

Définition 5

La pulsation ω_0 qui intervient dans la fonction de transfert est appelée **pulsation naturelle** ou **pulsation propre**¹.

1. Pour être plus précis, il s'agit de la pulsation propre du système non amorti.

Définition 6

La **pulsation de résonance** est la pulsation pour laquelle l'amplification est maximale.

Définition 7

La **pulsation de coupure** est la (ou les) pulsation(s) pour la(les)quelle(s) l'amplification est égale à l'amplification maximale divisée par $\sqrt{2}$ ou le gain est égal au gain maximal -3 dB :

$$A(\omega_c) = \frac{A_{\max}}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad G(\omega_c) = G_{\max} - 3 \text{ dB}.$$

Le coefficient d'amortissement pour un filtre du second ordre est défini comme le coefficient $m = \frac{1}{2Q}$ qui intervient dans la fonction de transfert. Il est lié à l'amortissement de la réponse temporelle à l'échelon.

Le coefficient de qualité Q est lié à la qualité du filtrage pour le filtre passe-bande.

B. Filtre passe-bas du second ordre

Dans ce paragraphe, nous étudions les diagrammes de Bode des filtres passe-bas du second ordre.

B.1. Fonction de transfert

Définition 8

La fonction de transfert d'un **filtre passe-bas du second ordre** s'écrit sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{Q} - \omega^2}, \quad \text{où } H_0 \text{ est l'amplification statique.}$$

Dans ce paragraphe, nous étudions, en exemple, le filtre suivant (fig. 1) :

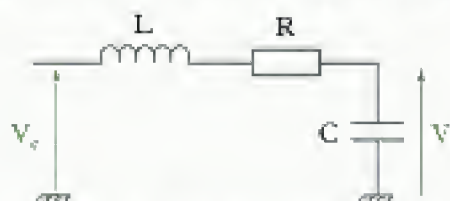


Fig. 1 - Filtre passif passe-bas.

Application 2 Filtre passe-bas du second ordre

Calculer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$ du filtre de la figure 1. Déterminer les expressions du coefficient de qualité du filtre et de la pulsation propre.

Solution

Pour le calcul de la fonction de transfert, nous pouvons utiliser la formule du diviseur de tension :

$$\underline{V}_s = \frac{1}{jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{V}_e.$$

Nous en déduisons :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}.$$

On trouve alors :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Nous travaillons désormais avec la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}.$$

B.2. Étude du diagramme de Bode du gain

Pour l'étude d'un filtre, on utilise le diagramme de Bode du gain. C'est-à-dire que nous traçons $20\log|\underline{H}(j\omega)|$ en fonction de ω en échelle logarithmique. Pour cela, nous établissons un protocole qu'il faut suivre pour chaque étude de filtre.

• Étude du maximum de la fonction de transfert

Dans un premier temps, nous déterminons le maximum¹ de la fonction de transfert en étudiant le module de $\underline{H}(j\omega)$:

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}.$$

Après calcul de la dérivée, on montre que $|\underline{H}(j\omega)|$ possède un maximum si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. L'amplification maximale est alors :

$$H_{\max} = \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \quad \text{pour} \quad \omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

qui est la pulsation de résonance du filtre.

Par contre, dans le cas où $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, l'amplification maximale est l'amplification statique obtenue en continu ($\omega \approx 0$), ici égale à 12.

1. Pour cela, il suffit de définir le minimum du dénominateur donc de la fonction $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2$.

1. L'étude des asymptotes permet de définir des équations de droites. Dire que G tend vers $-\infty$ lorsque ω tend vers $+\infty$ ne donne qu'une idée de l'évolution du gain et ne permet en aucun cas de tracer son diagramme de Bode.

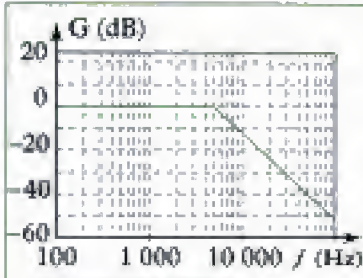


Fig. 2 - Diagramme de Bode asymptotique du gain du filtre passe-bas dans lequel $L = 0,1$ H et $C = 10$ nF.

• Tracé du diagramme de Bode asymptotique du gain

L'étude des asymptotes¹ consiste à déterminer les équations des courbes asymptotiques en basses fréquences et en hautes fréquences, c'est-à-dire lorsque ω tend vers 0 et $+\infty$:

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, G \rightarrow 0 \text{ dB}$$

$$\omega \rightarrow \infty, G \rightarrow 40 \log(\omega_0) - 40 \log(\omega).$$

La pente de l'asymptote en haute fréquence est ici de -40 dB par décade ou -12 dB par octave.

Le diagramme asymptotique est la réunion des deux asymptotes qui se coupent en ω_0 . Le diagramme asymptotique est constitué de (fig. 2) :

- l'asymptote basses fréquences pour des pulsations comprises entre $0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et ω_0 ;
- l'asymptote hautes fréquences entre ω_0 et $+\infty$.

Cette étude asymptotique permet d'appréhender l'allure de la courbe représentant le gain en basses et hautes fréquences.

• Allure du diagramme de Bode réel du gain

Nous calculons le gain pour la pulsation propre ce qui permet de connaître un point de la courbe.

Le gain maximum (si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$) permet de déterminer un second point.

Ensuite, l'ébauche du diagramme réel s'effectue en traçant une courbe tangente aux asymptotes en 0 et $+\infty$ et passant par le(s) point(s) défini(s) ci-dessus.

Nous arrivons alors à une allure exploitable du diagramme de Bode du gain.

Pour exemple, nous avons tracé ci-dessous deux diagrammes de Bode du gain pour deux cas différents de filtre passe-bas du second ordre.

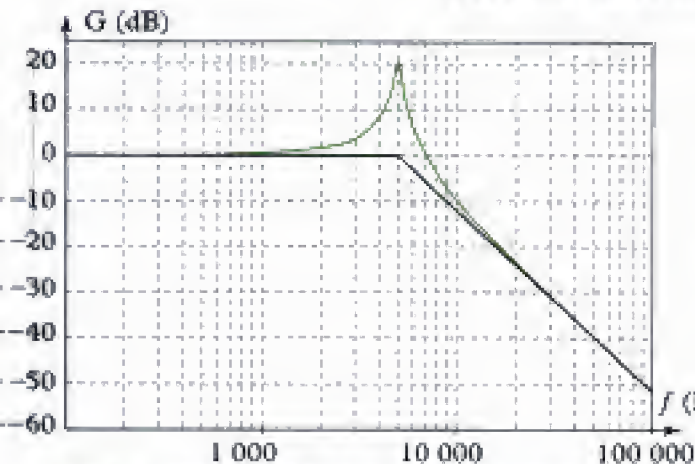


Fig. 3 - Diagramme de Bode du gain du filtre passe-bas pour $L = 0,1$ H, $C = 10$ nF et $R = 316 \Omega$ ($Q = 10$).

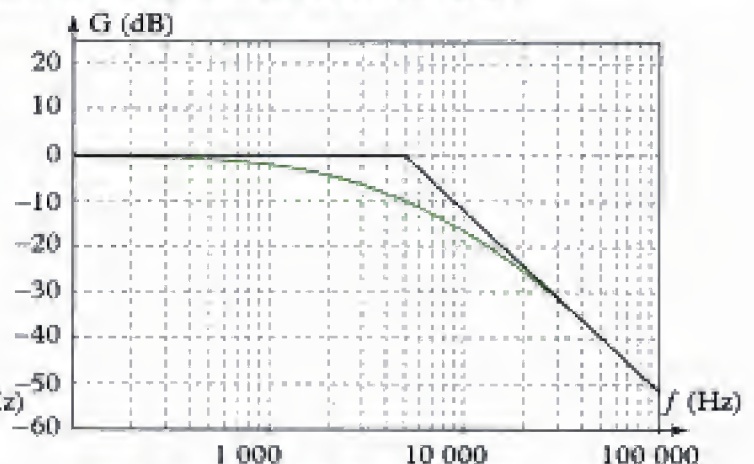


Fig. 4 - Diagramme de Bode du gain du filtre passe-bas pour $L = 0,1$ H, $C = 10$ nF et $R = 32 \text{ k}\Omega$ ($Q = 0,1$).

On remarque que le tracé du diagramme réel se trouve toujours du même côté des asymptotes. Il ne les traverse jamais.

Dans le cas où il y a résonance, le tracé réel se trouve au-dessus des asymptotes et dans l'autre cas, il se trouve en dessous.

B.3. Étude du diagramme de Bode de la phase

Pour l'étude d'un filtre, on utilise aussi le diagramme de Bode du déphasage introduit par le filtre. C'est-à-dire que nous tracerons l'argument de $\underline{H}(j\omega)$ en fonction de ω en échelle logarithmique. Pour tracer ce diagramme de Bode, nous allons utiliser le protocole suivant.

1. Nous noterons :

$$\varphi = \text{Arg}(H(j\omega)).$$

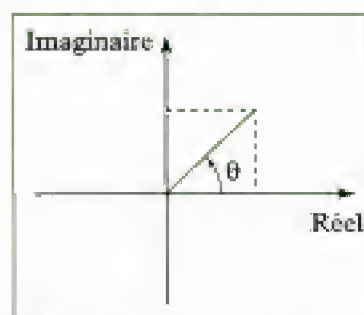


Fig. 5 - Représentation de l'argument dans le plan complexe.

• Diagramme de Bode asymptotique de la phase¹

L'étude des asymptotes consiste à déterminer la valeur de la phase en basses fréquences et en hautes fréquences c'est-à-dire lorsque ω tend vers 0 et $+\infty$:

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \varphi \rightarrow 0 \text{ rad},$$

$$\omega \rightarrow \infty, \quad \varphi \rightarrow -\pi \text{ rad} \text{ ou } \varphi \rightarrow \pi \text{ rad}.$$

Pour choisir, il faut étudier l'évolution de la phase avec la fréquence.

Dans notre cas, l'argument de la fonction de transfert est l'opposé de l'argument du complexe $1 + j\frac{x}{Q} - x^2$. Sa partie réelle évolue de 1 à $-\infty$ et sa partie imaginaire est toujours positive. Donc dans le plan complexe, on se trouve dans les deux quadrants du haut (fig. 5). Nous en concluons que l'argument de $1 + j\frac{x}{Q} - x^2$ évolue de 0 à π lorsque nous augmentons la fréquence.

Donc pour le diagramme asymptotique, nous traçons :

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \varphi \rightarrow 0 \text{ rad}$$

$$\omega \rightarrow \infty, \quad \varphi \rightarrow -\pi \text{ rad}.$$

Le passage d'une asymptote à l'autre s'effectue à la pulsation ω_0 .

• Ébauche du diagramme de Bode réel de la phase

Pour ébaucher le diagramme de Bode réel, nous déterminons la valeur du déphasage pour la pulsation propre :

$$\omega = \omega_0, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

En outre, il faut savoir que plus le coefficient de qualité est important, plus le diagramme réel est proche du diagramme asymptotique (fig. 6).

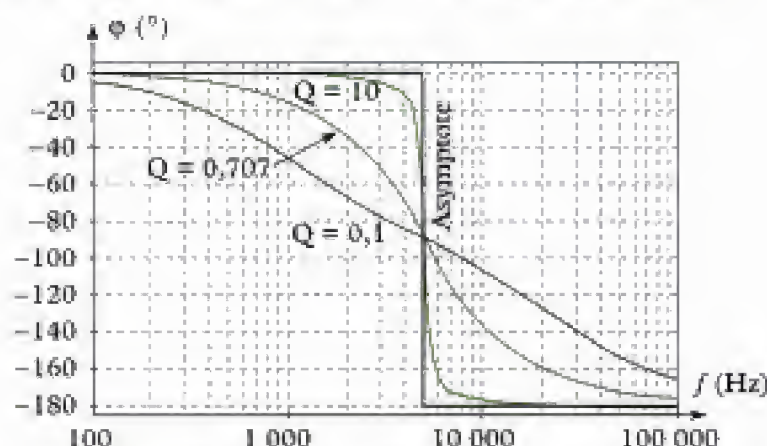


Fig. 6 - Diagramme de Bode de la phase du filtre passe-bas.

Cette étude permet d'ébaucher les diagrammes de Bode du gain et de la phase. Nous pouvons les utiliser pour définir la bande passante du filtre.

B.4. Bande passante

La bande passante d'un filtre passe-bas est l'intervalle de pulsations allant de 0 à ω_c qui correspond à la pulsation telle que :

$$G(\omega_c) = G(0) - 3, \text{ d'où : BP} = [0, \omega_c].$$

Les protocoles utilisés dans cette partie sont mis en œuvre dans les études suivantes afin de déterminer les diagrammes de Bode des autres types de filtres du second ordre.

C. Filtre passe-haut du second ordre

Nous allons étudier les diagrammes de Bode des filtres passe-haut du second ordre.

C.1. Fonction de transfert

Définition 9

La fonction de transfert d'un filtre passe-haut du second ordre s'écrit sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{H_0 \omega^2}{1 + j\frac{\omega}{Q} - \omega^2}$$

où H_0 est un coefficient positif ou négatif.

Dans ce paragraphe, nous étudions, en exemple, le filtre suivant (fig. 7) :

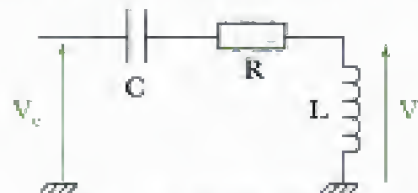


Fig. 7 - Filtre passe-haut passif.

Application 3 Filtre passe-haut du second ordre

Calculer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_c}$ du filtre de la figure 7. Déterminer les expressions du coefficient de qualité du filtre et de la pulsation propre.

Solution

Pour le calcul de la fonction de transfert, nous pouvons utiliser la formule du diviseur de tension :

$$\underline{V}_s = \frac{jL\omega}{jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{V}_c.$$

Nous en déduisons :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_c} = \frac{-LC\omega^2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2},$$

On trouve alors :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Nous travaillons désormais avec la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}},$$

C.2. Étude du diagramme de Bode du gain

Pour l'étude du diagramme de Bode du gain, nous utilisons le même protocole qu'au paragraphe B.2.

• Étude du maximum de la fonction de transfert

Le maximum de la fonction de transfert est obtenu en étudiant le module de $\underline{H}(j\omega)$:

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

1. Nous calculons la dérivée de $|\underline{H}(j\omega)|$ par rapport à ω et le maximum est trouvé pour la valeur de la pulsation qui annule cette dérivée.

Après calcul de la dérivée¹, nous montrons que $|\underline{H}(j\omega)|$ possède un maximum si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. L'amplification maximale est alors :

$$H_{\max} = \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \text{ pour } \omega_{\max} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

qui est la pulsation de résonance du filtre.

Par contre, dans le cas où $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, l'amplification maximale est celle obtenue en haute fréquence, qui est ici égale à 1.

• Tracé du diagramme de Bode asymptotique du gain

L'étude des asymptotes donne les équations des courbes asymptotiques en basses fréquences et en hautes fréquences c'est-à-dire lorsque ω tend vers 0 et $+\infty$:

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad G \rightarrow -40\log(\omega_0) + 40\log(\omega)$$

$$\omega \rightarrow \infty, \quad G \rightarrow 0 \text{ dB.}$$

La pente de l'asymptote en basses fréquences est ici de +40 dB par décade ou +12 dB par octave.

Le diagramme asymptotique est la réunion des deux asymptotes qui se coupent en ω_0 . Le diagramme asymptotique est constitué de (fig. 8) :

- l'asymptote basses fréquences pour des pulsations comprises entre 0 rad · s⁻¹ et ω_0 ;
- l'asymptote hautes fréquences entre ω_0 et $+\infty$.

• Allure du diagramme de Bode réel du gain

Afin d'ébaucher le diagramme de Bode réel, nous calculons le gain pour la pulsation propre ce qui donne un point de la courbe.

Si le gain possède un maximum (si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$), nous obtenons un second point de la courbe.

L'ébauche du diagramme réel s'effectue en traçant une courbe tangente aux asymptotes en 0 et $+\infty$ et en passant par le(s) point(s) défini(s) ci-dessus.

Nous traçons ci-après deux diagrammes de Bode du gain pour des valeurs différentes de Q .

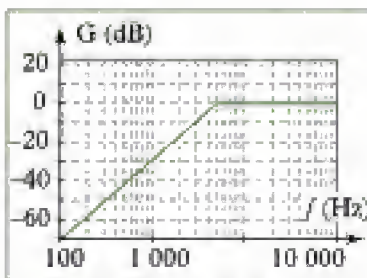


Fig. 8 - Diagramme de Bode asymptotique du gain du filtre passe-haut pour $L = 0,1$ H et $C = 10$ nF.

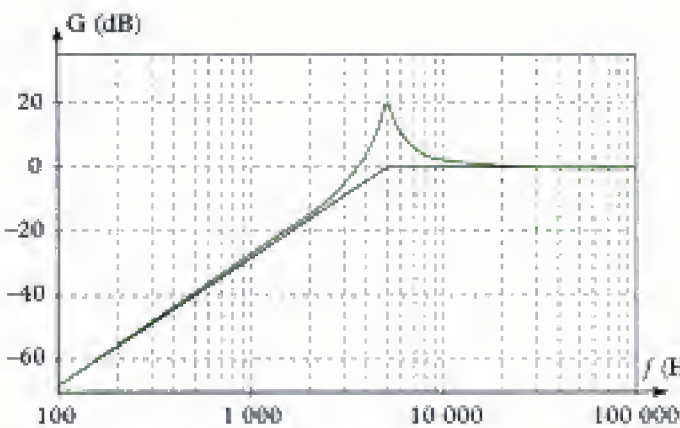


Fig. 9 - Diagramme de Bode du gain du filtre passe-haut pour $L = 0,1 \text{ H}$, $C = 10 \text{ nF}$ et $R = 316 \Omega$ ($Q = 0,1$).

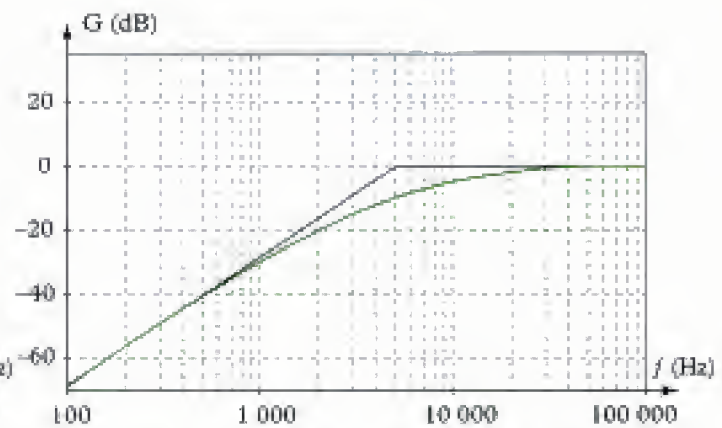


Fig. 10 - Diagramme de Bode du gain du filtre passe-haut pour $L = 0,1 \text{ H}$, $C = 10 \text{ nF}$ et $R = 32 \text{ k}\Omega$.

On remarque que le tracé du diagramme réel se trouve toujours du même côté des asymptotes. Il ne les traverse jamais.

Dans le cas où il y a résonance, le tracé réel se trouve au-dessus des asymptotes et dans l'autre cas, il se trouve en dessous.

C.3. Étude du diagramme de Bode de la phase

Afin de tracer le diagramme de Bode de l'argument de $\underline{H}(j\omega)$ en fonction de ω en échelle logarithmique, nous utilisons le protocole mis en place au paragraphe B.3.

• Diagramme de Bode asymptotique de la phase¹

L'étude des asymptotes consiste à déterminer la valeur de la phase en basses fréquences et en hautes fréquences c'est-à-dire lorsque ω tend vers 0 et $+\infty$:

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \varphi \rightarrow -\pi \text{ rad} \quad \text{ou} \quad \varphi \rightarrow \pi \text{ rad},$$

$$\omega \rightarrow \infty, \quad \varphi \rightarrow 0 \text{ rad}.$$

Pour choisir, il faut connaître l'évolution de la phase avec la fréquence.

Dans notre cas, l'argument de la fonction de transfert est $\pm \pi - \text{Arg}\left(1 + j\frac{x}{Q} - x^2\right)$.

Le terme $\pm \pi$ provient du signe négatif du numérateur.

Or, la partie réelle de $1 + j\frac{x}{Q} - x^2$ évolue de 1 à $-\infty$ et sa partie imaginaire est toujours positive. Donc, dans le plan complexe, on se trouve dans les deux quadrants du haut. Nous en concluons que l'argument de $1 + j\frac{x}{Q} - x^2$ évolue de 0 à π lorsque nous augmentons la fréquence.

Donc le déphasage évolue de π à 0 ou de $-\pi$ à -2π . Nous avons considéré que le déphasage était compris entre π et $-\pi$.

Donc pour le diagramme asymptotique, nous traçons :

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \varphi \rightarrow \pi \text{ rad},$$

$$\omega \rightarrow \infty, \quad \varphi \rightarrow 0 \text{ rad}.$$

Le passage d'une asymptote à l'autre s'effectue à la pulsation ω_0 .

• Ébauche du diagramme de Bode réel de la phase

Pour ébaucher le diagramme de Bode réel, nous déterminons la valeur du déphasage pour la pulsation propre :

$$\omega = \omega_0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

1. Nous noterons :

$$\varphi = \text{Arg}(\underline{H}(j\omega)).$$

Pour tracer ce diagramme réel, il faut savoir que plus le coefficient de qualité est important, plus le diagramme réel est proche du diagramme asymptotique (fig. 11).

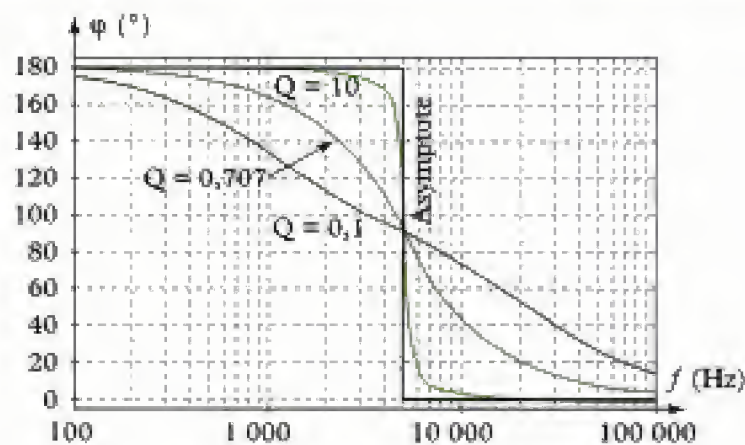


Fig. 11 - Diagramme de Bode de la phase du filtre passe-haut.

C.4. Bande passante

La bande passante d'un filtre passe-haut est l'intervalle de pulsations allant de ω_c à $+\infty$ où ω_c correspond à la pulsation telle que :

$$G(\omega_c) = G(+\infty) - 3, \quad \text{d'où : } \mathbf{BP} = [\omega_c, +\infty[.$$

D. Filtre passe-bande du second ordre

Nous allons étudier les diagrammes de Bode des filtres passe-bande du second ordre.

D.1. Fonction de transfert

Définition 10

La fonction de transfert d'un filtre passe-bande du second ordre s'écrit sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jH_0\frac{x}{Q}}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2} \quad \text{ou} \quad \underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

où H_0 est un coefficient positif.

Dans ce paragraphe, nous étudions le filtre suivant (fig. 12) :

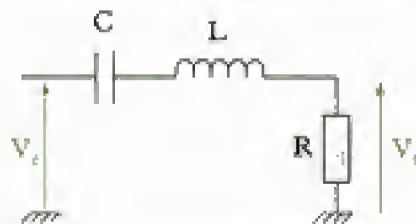


Fig. 12 - Filtre passe-bande passif.

Application 4 Filtre passe-bande du second ordre

Calculer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$ du filtre de la figure 12. Déterminer les expressions du coefficient de qualité du filtre et de la pulsation propre.

Solution

Pour le calcul de la fonction de transfert, nous pouvons utiliser la formule du diviseur de tension :

$$\underline{V}_s = \frac{R}{jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{V}_e.$$

Nous en déduisons :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}.$$

On trouve alors :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Nous travaillons désormais avec la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}.$$

D.2. Étude du diagramme de Bode du gain

Pour l'étude du diagramme de Bode du gain, nous utilisons le même protocole qu'au paragraphe B.2.

• Étude du maximum de la fonction de transfert

Déterminons le maximum de la fonction de transfert en étudiant le module de $\underline{H}(j\omega)$:

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}.$$

Après calcul, nous montrons que $|\underline{H}(j\omega)|$ possède un maximum qui est $H_{\max} = 1$ pour $\omega_{\max} = \omega_0$ quelle que soit la valeur de Q .

• Tracé du diagramme de Bode asymptotique du gain

L'étude des asymptotes donne les équations des courbes asymptotiques en basses fréquences et en hautes fréquences c'est-à-dire lorsque ω tend vers 0 et $+\infty$:

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad G \rightarrow -20\log(Q\omega_0) + 20\log(\omega),$$

$$\omega \rightarrow \infty, \quad G \rightarrow 20\log\left(\frac{\omega_0}{Q}\right) - 20\log(\omega).$$

La pente de l'asymptote en basses fréquences est ici de +20 dB par décade ou +6 dB par octave. La pente de l'asymptote en hautes fréquences est ici de -20 dB par décade ou -6 dB par octave.

Le diagramme asymptotique est la réunion des deux asymptotes qui se coupent en $(\omega_0, -20\log(Q))$. Le diagramme asymptotique est constitué de :

- l'asymptote basses fréquences pour des pulsations comprises entre $0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et ω_0 ;
- l'asymptote hautes fréquences entre ω_0 et $+\infty$.

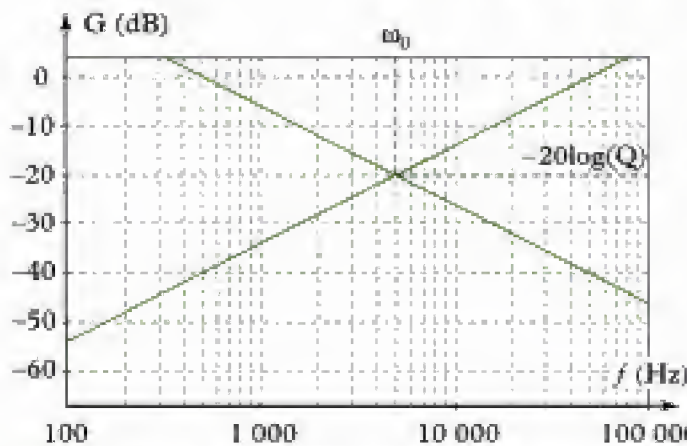


Fig. 13 - Tracé des deux asymptotes ($Q = 10$).

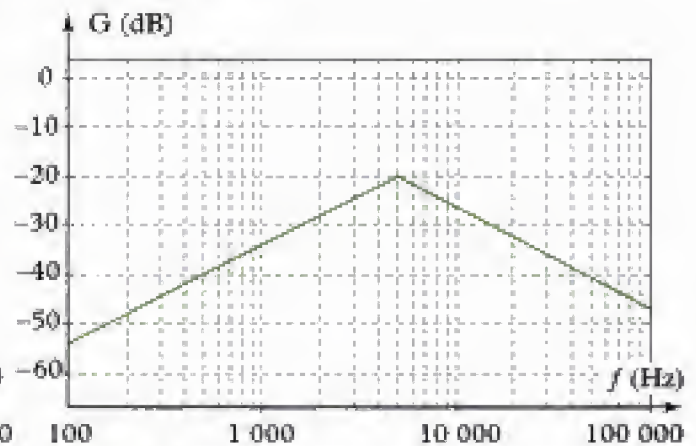


Fig. 14 - Diagramme de Bode asymptotique du gain du filtre passe-bande pour $L = 0,1 \text{ H}$ et $C = 10 \text{ nF}$.

• Allure du diagramme de Bode réel du gain

Enfin, le gain maximal égal à 0 dB est obtenu pour la pulsation propre ce qui donne un point de la courbe. Nous pouvons alors ébaucher le diagramme réel qui passe par le point défini ci-dessus (avec une tangente horizontale).

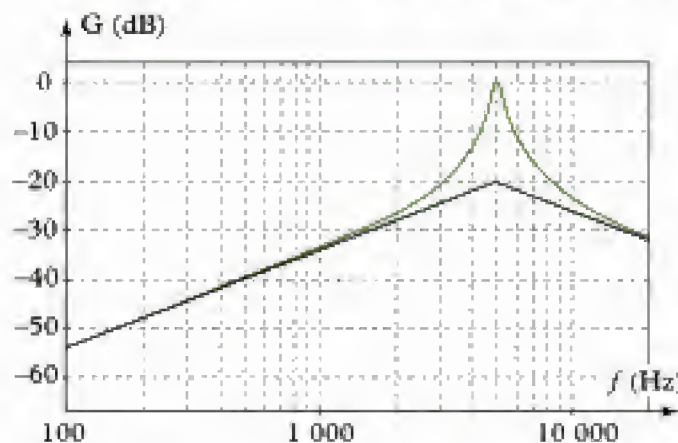


Fig. 15 - Diagramme de Bode du gain du filtre passe-bande pour $L = 0,1 \text{ H}$, $C = 10 \text{ nF}$ et $R = 316 \Omega$ ($Q = 10$).

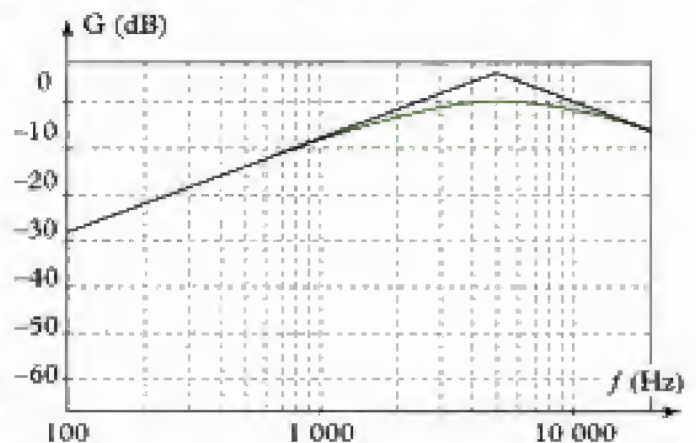


Fig. 16 - Diagramme de Bode du gain du filtre passe-bande pour $L = 0,1 \text{ H}$, $C = 10 \text{ nF}$ et $R = 6,3 \text{ k}\Omega$ ($Q = 0,5$).

On remarque que le tracé du diagramme réel se trouve toujours du même côté des asymptotes. Il ne les traverse jamais.

D.3. Étude du diagramme de Bode de la phase

Afin de tracer le diagramme de Bode de l'argument de $H(j\omega)$ en fonction de ω en échelle logarithmique, nous utilisons le protocole mis en place au paragraphe B.3.

1. Nous noterons :

$$\varphi = \text{Arg}(H(j\omega)).$$

• Diagramme de Bode asymptotique de la phase¹

L'étude des asymptotes consiste à déterminer la valeur de la phase en basses fréquences et en hautes fréquences c'est-à-dire lorsque ω tend vers 0 et $+\infty$:

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ rad},$$

$$\omega \rightarrow \infty, \quad \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

L'argument de la fonction de transfert est :

$$\text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = -\text{Arctan}\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right).$$

Le passage d'une asymptote à l'autre s'effectue à la pulsation ω_0 .

• Ébauche du diagramme de Bode réel de la phase

Pour ébaucher le diagramme de Bode réel, nous déterminons la valeur du déphasage pour la pulsation propre : $\omega = \omega_0$, $\varphi = 0$ rad.

Pour tracer ce diagramme réel, il faut remarquer que plus le coefficient de qualité est important, plus le diagramme réel est proche du diagramme asymptotique (fig. 17).

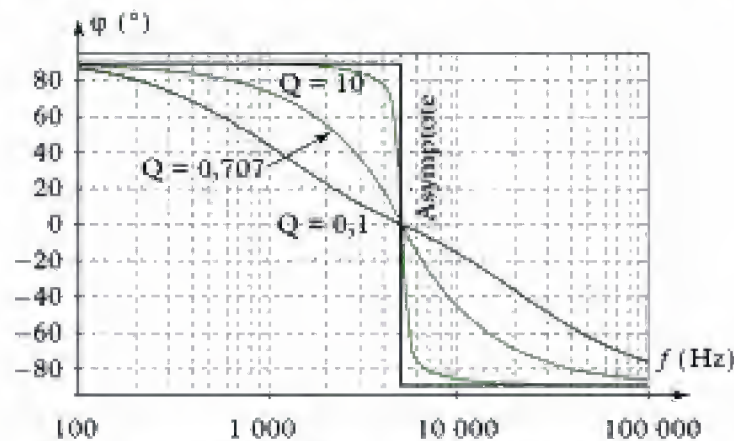


Fig. 17 - Diagramme de Bode de la phase du filtre passe-bande.

D.4. Bande passante

La bande passante d'un filtre passe-bande est l'intervalle de pulsations allant de ω_{c1} à ω_{c2} qui correspond aux pulsations telles que le gain soit égal au gain maximum (ici 0 dB) - 3 dB :

$$G(\omega_{ci}) = G(\omega_0) - 3, \quad \text{d'où : } \mathbf{BP} = [\omega_{c1}, \omega_{c2}].$$

Le filtre passe-bande du second ordre possède deux pulsations de coupures ω_{c1} et ω_{c2} . Ces pulsations de coupure sont telles que :

$$|\underline{H}(j\omega_{c1})| = |\underline{H}(j\omega_{c2})| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Or, } |\underline{H}(j\omega_{ci})| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega_{ci}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{ci}}\right)^2}} \quad \text{où } \omega_{ci} \text{ représente } \omega_{c1} \text{ ou } \omega_{c2}.$$

$$\text{Nous en déduisons } Q^2\left(\frac{\omega_{ci}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{ci}}\right)^2 = 1 \text{ soit } Q\left(\frac{\omega_{ci}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{ci}}\right) = \pm 1.$$

$$\text{Cette équation peut s'écrire : } \frac{\omega_{ci}^2}{\omega_0^2} \pm \frac{\omega_{ci}}{Q\omega_0} - 1 = 0.$$

Les solutions de cette équation sont :

$$\omega_{c1} = \frac{\omega_0}{2Q}(\sqrt{1 + 4Q^2} - 1) \quad \text{et} \quad \omega_{c2} = \frac{\omega_0}{2Q}(\sqrt{1 + 4Q^2} + 1).$$

Le coefficient de qualité vérifie alors la relation suivante :

$$\frac{1}{Q} = \frac{|\omega_{c2} - \omega_{c1}|}{\omega_0}.$$

Donc plus la bande passante est faible (plus le filtre est sélectif), plus le facteur de qualité est important.

Il s'agit d'un coefficient qui définit la qualité d'un filtre passe-bande. La bande passante est d'autant plus faible que Q est grand (fig. 18).

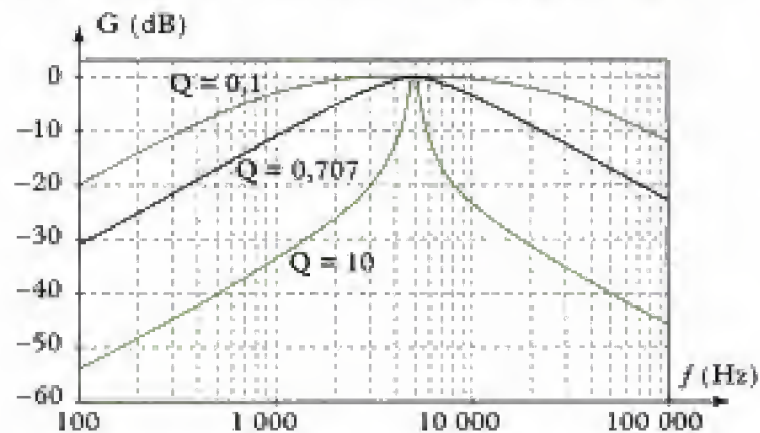


Fig. 18 - Évolution du diagramme de Bode du gain selon Q pour un filtre passe-bande du second ordre.

E. Filtre coupe-bande du second ordre

Nous allons étudier les diagrammes de Bode des filtres coupe-bande du second ordre.

E.1. Fonction de transfert

Définition 11

La fonction de transfert d'un filtre coupe-bande du second ordre s'écrit sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0(1 - x^2)}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$$

où H_0 est un coefficient positif ou négatif.

1. Ce filtre fait apparaître l'association d'une bobine et d'un condensateur en parallèle. Ce circuit est appelé circuit bouchon et constitue un exemple particulier de circuit passe-bande.

Dans ce paragraphe, nous étudions le filtre¹ suivant (fig. 19) :

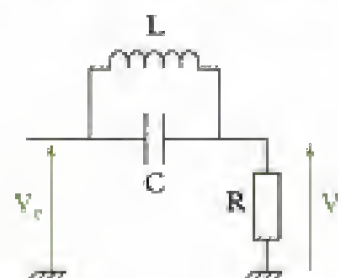


Fig. 19 - Filtre coupe-bande passif.

Application 5 Filtre coupe-bande du second ordre

Calculer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$ du filtre de la figure 19. Déterminer les expressions du coefficient de qualité du filtre et de la pulsation propre.

Solution

Pour le calcul de la fonction de transfert, nous pouvons utiliser la formule du diviseur de tension :

$$\underline{V}_s = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega + \frac{1}{jL\omega}}} \underline{V}_e.$$

Nous en déduisons :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{1 - LC\omega^2}{1 + j\frac{L}{R}\omega - LC\omega^2}.$$

On trouve alors :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Nous travaillons désormais avec la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}.$$

E.2. Étude du diagramme de Bode du gain

Pour l'étude du diagramme de Bode du gain, nous utilisons le même protocole qu'au paragraphe B.2.

* Étude du maximum de la fonction de transfert

Le maximum du module de la fonction de transfert est égal à 1 pour les très basses et très hautes fréquences.

Par contre, $|\underline{H}(j\omega)|$ est égal à 0 pour $\omega_{\min} = \omega_0$, ce qui constitue alors un minimum du gain.

* Tracé du diagramme de Bode asymptotique du gain

L'étude des asymptotes donne :

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad G \rightarrow 0 \text{ dB}$$

$$\omega \rightarrow \infty, \quad G \rightarrow 0 \text{ dB}.$$

Cette étude n'amène pas de renseignement sur l'allure du diagramme de Bode du gain.

Dans le cas du filtre coupe-bande, seul le tracé réel à l'aide d'une calculatrice donne un résultat satisfaisant. Nous savons que la coupure s'effectue autour de la pulsation ω_0 ce qui permet l'ébauche du diagramme réel (fig. 20).

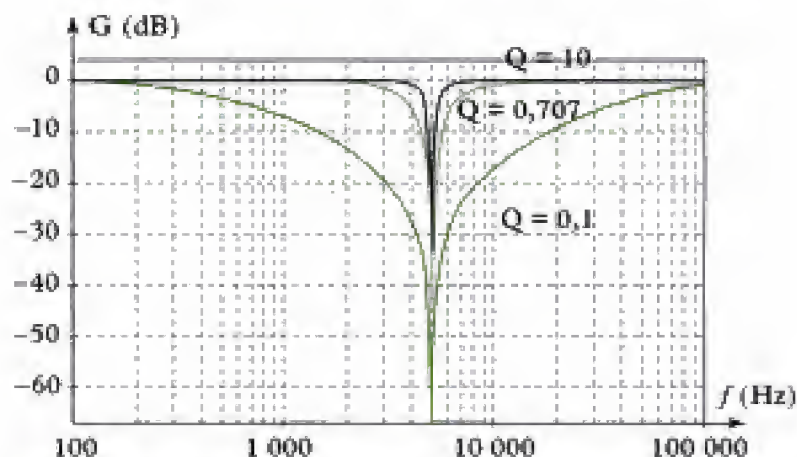


Fig. 20 - Diagramme de Bode du gain du filtre coupe-bande du second ordre avec $L = 0,1$ H, $C = 10$ nF et R variable.

E.3. Étude du diagramme de Bode de la phase

Nous utilisons le protocole mis en place au paragraphe B.3.

1. Nous noterons :

$$\varphi = \text{Arg}(H(j\omega)).$$

• Diagramme de Bode asymptotique de la phase¹

L'étude des asymptotes donne :

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \varphi \rightarrow 0 \text{ rad},$$

$$\omega \rightarrow \infty, \quad \varphi \rightarrow 0 \text{ rad}.$$

Là aussi, seul le tracé réel donne un résultat satisfaisant.

• Ébauche du diagramme de Bode réel de la phase

L'argument de la fonction de transfert est égal à la somme de l'argument de $1 - x^2$ et de l'opposé de l'argument du complexe $1 + j\frac{x}{Q} - x^2$.

L'argument de $1 - x^2$ est égal à 0 pour $\omega < \omega_0$ et π pour $\omega > \omega_0$.

Donc la courbe (fig. 21) possède une discontinuité de π en $\omega = \omega_0$.

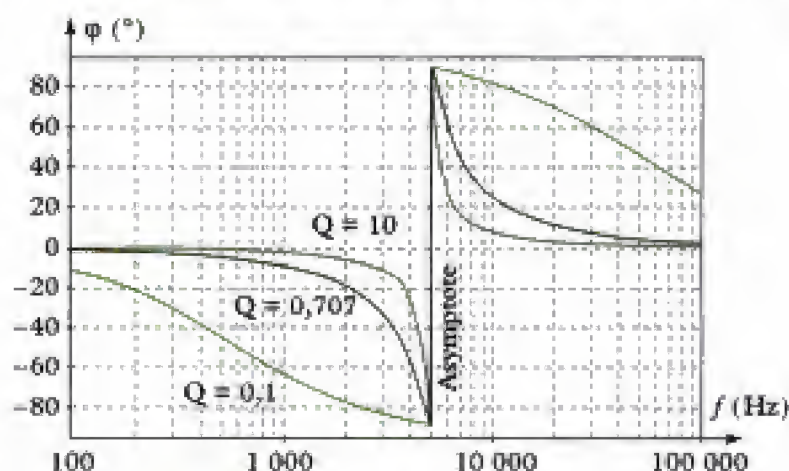


Fig. 21 - Diagramme de Bode de la phase.

E.4. Bande passante

Soit ω_{c1} et ω_{c2} les pulsations de coupure telles que le gain soit égal au gain maximum (ici 0 dB) - 3 dB :

$$\text{BP} = [0, \omega_{c1}] \cup [\omega_{c2}, +\infty[.$$

F. Étude du cas où $Q < \frac{1}{2}$

L'étude du diagramme de Bode peut alors s'effectuer en décomposant le dénominateur en produit de deux termes du premier ordre. Ceci permet d'améliorer l'étude des diagrammes de Bode.

F.1. Fonction de transfert

Dans ce cas, la fonction de transfert peut s'écrire sous la forme d'un produit de deux termes du premier ordre¹ :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{N\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{N\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

$$\text{où } \omega_1 = \omega_0\left(\frac{1}{2Q} - \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right) \text{ et } \omega_2 = \omega_0\left(\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right).$$

L'étude du diagramme de Bode s'effectue en sommant les diagrammes de Bode pour chaque fonction de transfert du premier ordre.

Utilisons cette propriété sur les exemples de filtres passe-bas et passe-bande du second ordre.

F.2. Cas d'un filtre passe-bas

Pour ce filtre, la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

Donc le diagramme de Bode asymptotique du gain (fig. 22) est la somme des diagrammes asymptotiques du gain pour les fonctions de transfert du premier ordre :

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)} \text{ et } \underline{H}_2(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

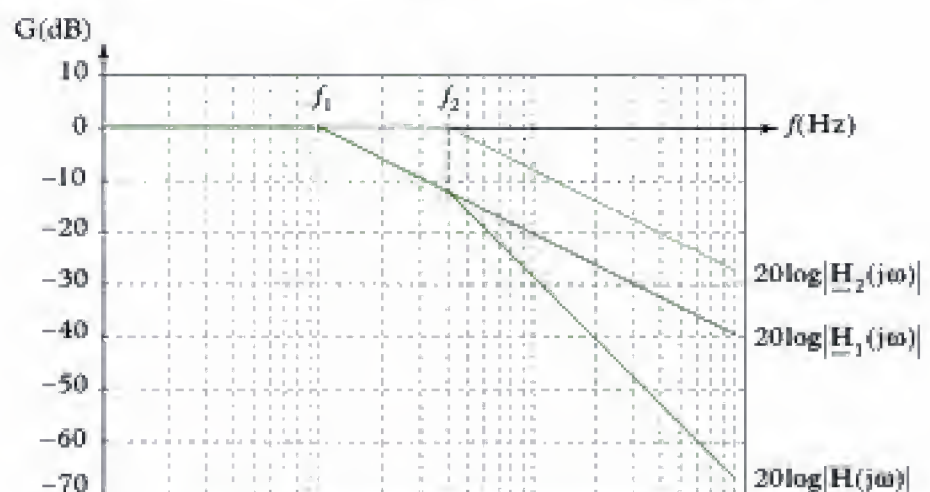


Fig. 22 - Diagramme de Bode asymptotique du gain.

¹. Les racines du dénominateur ne sont plus complexes conjuguées mais ce sont des racines réelles.

F.3. Cas d'un filtre passe-bande

Pour ce filtre, la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{Q\omega_0}}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

Donc le diagramme de Bode asymptotique du gain (fig. 23) est la somme des diagrammes asymptotiques du gain pour les fonctions de transfert du premier ordre :

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)}, \quad \underline{H}_2(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)} \quad \text{et} \quad \underline{H}_3(j\omega) = j\frac{\omega}{Q\omega_0}$$

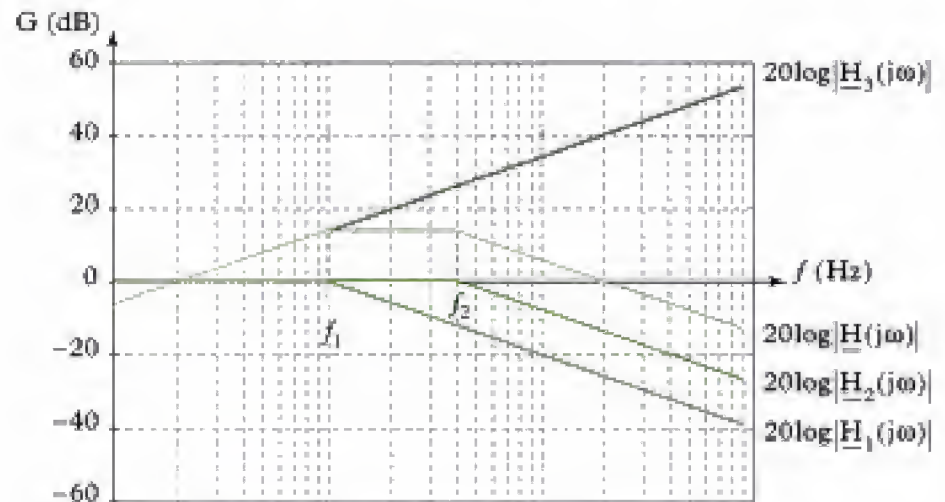


Fig. 23 - Diagramme de Bode asymptotique du gain.

G. Étude d'un filtre

G.1. Détermination du type d'un filtre

Ce paragraphe a pour objectif d'apporter des méthodes d'étude du comportement d'un filtre.

Dans le cadre du programme officiel, on ne peut rencontrer que des filtres du premier ou second ordre. La recherche du type d'un filtre se restreint à savoir si le filtre se comporte comme un passe-bas, un passe-haut, un passe-bande ou un coupe-bande.

• De manière théorique, l'étude de la sortie du montage en basse fréquence et en haute fréquence est une étape nécessaire.

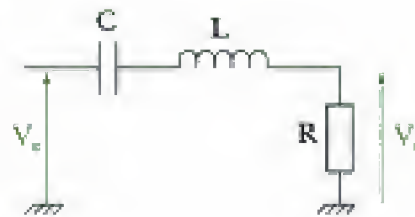
En basse fréquence, nous remplaçons les condensateurs par des coupe-circuits (interrupteurs ouverts) et les bobines par des court-circuits (interrupteurs fermés). Nous étudions ensuite la valeur de la sortie.

En haute fréquence, nous remplaçons les condensateurs par des courts-circuits et les bobines par des coupe-circuits. Nous étudions ensuite la valeur de la sortie.

Nous en déduisons ensuite le type du filtre.

Application 6 Type d'un filtre

Déterminer le type du filtre suivant :

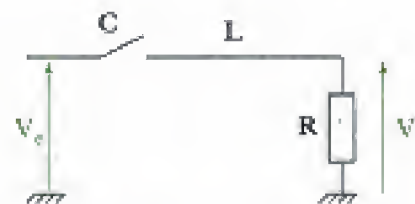


Solution

Afin de déterminer le type d'un filtre, nous l'étudions en basse fréquence et en haute fréquence sachant qu'en basse fréquence, le condensateur se comporte comme un coupe-circuit et la bobine comme un court-circuit, tandis qu'en haute fréquence c'est l'inverse.

Nous réalisons les schémas équivalents au filtre en basse fréquence et en haute fréquence.

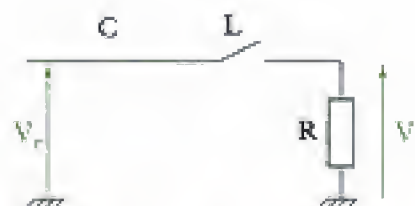
• Basse fréquence



L'entrée et la sortie ne sont pas connectées. La sortie est donc nulle dans ce cas puisque R est reliée à la masse. Le filtre ne laisse pas passer les basses fréquences.

Il s'agit donc d'un filtre passe-haut ou passe-bande.

• Haute fréquence



L'entrée et la sortie ne sont pas connectées. La sortie est donc nulle dans ce cas puisque R est reliée à la masse. Le filtre ne laisse pas passer les hautes fréquences.

Il s'agit donc d'un **filtre passe-bande**.

- De manière pratique, nous effectuons la mesure de la sortie à entrée constante en faisant varier la fréquence sur une grande plage de valeurs. Nous pouvons alors nous rendre compte du comportement du filtre.

- Dans le cas d'un filtre passe-bas, l'amplitude de la tension de sortie reste constante en basse fréquence et nous mesurons en haute fréquence la variation de l'amplification sur une octave pour des fréquences croissantes. Si l'amplification est divisée par 2, il s'agit d'un premier ordre et si elle est divisée par 4, il s'agit d'un second ordre.

- Dans le cas d'un filtre passe-haut, nous mesurons en basse fréquence la variation de l'amplification sur une octave pour des fréquences croissantes. Si l'amplification est multipliée par 2, il s'agit d'un premier ordre et si elle est multipliée par 4, il s'agit d'un second ordre. De plus, l'amplitude de la tension de sortie reste constante en haute fréquence.

– Dans le cas d'un filtre passe-bande, nous mesurons en basse et haute fréquence la variation de l'amplification sur une octave. L'amplitude de la tension de sortie doit augmenter puis diminuer lorsque la fréquence augmente. Dans les paragraphes suivants, nous détaillerons une méthode expérimentale d'étude des filtres.

G.2. Détermination de la ou les fréquences de coupure

Une fois connu le type du filtre, nous déterminons sa (ou ses) fréquence(s) de coupure, ce qui nous sert à définir le domaine de fréquences sur lequel est menée l'étude du filtre.

- Pour un passe-bas, nous augmentons la fréquence à partir d'une zone de fréquence où l'amplification est constante (la tension de sortie ne varie pas à entrée constante) et la fréquence pour laquelle la tension de sortie est divisée par 1,41 à entrée constante donne la fréquence de coupure.

- Pour un passe-haut, nous diminuons la fréquence à partir d'une zone de fréquence où l'amplification est constante (la tension de sortie ne varie pas à entrée constante) et la fréquence pour laquelle la tension de sortie est divisée par 1,41 à entrée constante donne la fréquence de coupure.

- Pour un passe-bande, nous augmentons la fréquence à partir d'une zone de fréquence où l'amplification est croissante et la fréquence pour laquelle la tension de sortie est maximale à entrée constante donne la fréquence propre du filtre. Ensuite, il suffit de déterminer les fréquences pour lesquelles la grandeur de sortie est égale à la grandeur de sortie maximale divisée par 1,41 pour obtenir les fréquences de coupure.

- Pour un coupe-bande, la fréquence où la valeur de la sortie est la plus faible à entrée constante est la fréquence propre. Ensuite, il suffit de déterminer les fréquences pour lesquelles la grandeur de sortie est égale à la grandeur de sortie maximale divisée par 1,41 pour obtenir les fréquences de coupure.

G.3. Diagrammes de Bode

Enfin, la zone d'étude est définie en étudiant la fonction de transfert sur trois ou quatre décades centrées sur la fréquence propre ou la fréquence de coupure.

- Pour la fréquence, il est préférable d'effectuer la mesure sur un oscilloscope. Dans le cas d'un oscilloscope à mesure automatique, il est souvent nécessaire de visualiser plus d'une période du signal à l'écran pour obtenir une mesure. L'échelle logarithmique en abscisse nécessite une petite réflexion sur les mesures à prendre. En effet, 1,5 kHz reste facile à placer sur l'échelle tandis que 8,5 kHz est plus délicat. Donc les mesures sont souvent faites sous forme de multiple de 10^x où x représente la décade : 1 kHz, 3 kHz, 5 kHz, 8 kHz, 10 kHz, 30 kHz, 50 kHz, ...

Pour un tracé précis, il est nécessaire d'être vigilant autour de la fréquence propre. Donc, le nombre de mesures est plus important autour de la fréquence de coupure ou entre les fréquences de coupure et moins important pour les fréquences plus basses ou plus hautes.

- Pour le gain, il est souvent préférable de mesurer les tensions crête-à-crête (*peak-peak* en anglais : V_{pp} sur certains oscilloscopes à mesure automatique). Il faut bien se rappeler que la mesure sera plus précise si le calibre est adapté : le signal doit prendre le maximum d'amplitude sur l'écran tout en restant

complètement visible (le mode AC pour des fréquences supérieures à quelques dizaines de hertz est utilisable dans le cas d'une composante continue importante sur le signal). Il est à noter que même avec une mesure automatique, il est nécessaire de se placer sur un calibre adapté sinon la valeur indiquée risque d'être imprécise.

• Pour la phase, la mesure s'effectue par curseur sur certains oscilloscopes (sinon, par règle de trois). Le calibre vertical doit être adapté, la synchronisation doit être effectuée sur le signal d'entrée et la base de temps réglée pour visualiser une demi-période sur la largeur de l'écran (le bouton de décalibrage horizontal peut être utile). L'écart le plus petit entre l'instant où le signal de sortie passe par 0 et celui où le signal d'entrée passe par 0 est mesuré en nombre de graduations (il faut vérifier que les deux signaux sont centrés sur 0 V). 10 carreaux correspondent à π radians, à partir de la mesure précédente, nous en déduisons alors le déphasage. Si le signal de sortie est en avance de phase par rapport au signal d'entrée, le déphasage est positif et s'il est en retard de phase, le déphasage est négatif.

Prenons l'exemple suivant (fig. 24) :

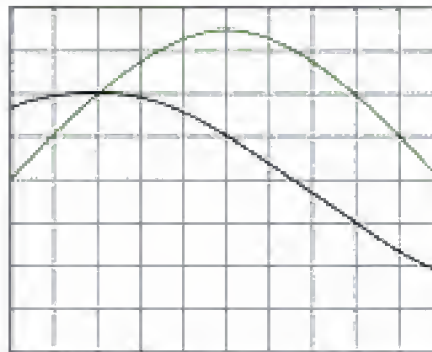


Fig. 24 - Le signal d'entrée est en vert et le signal de sortie en noir.

Le signal de sortie est en avance de phase par rapport au signal d'entrée (il passe par 0 avant le signal d'entrée) donc le déphasage est positif.

Le signal de sortie et le signal d'entrée ont été centrés sur 0.

Une demi-période correspond à 10 carreaux et le 0 du signal de sortie est décalé d'environ 3,3 carreaux par rapport au signal d'entrée (écart minimum).

Donc le déphasage est $\varphi = \frac{3,3}{10} \pi \approx \frac{\pi}{3}$ et le signal de sortie est :

$$s(t) = A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right),$$

si le signal d'entrée est du type $e(t) = E \cos(\omega t)$.

L'essentiel

✓ Filtre passe-bas du second ordre

- La fonction de transfert d'un **filtre passe-bas du second ordre** s'écrit sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$$

où H_0 est l'amplification statique, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, ω_0 la pulsation propre du filtre et Q le coefficient de qualité du filtre.

- Les asymptotes du diagramme de Bode du gain se coupent au point $(\omega_0, 20\log|H_0|)$. L'asymptote basses fréquences est une droite horizontale d'équation $G = 20\log|H_0|$ et l'asymptote hautes fréquences est une droite de pente -40 dB/décade.

- Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, l'amplification maximale est alors :

$$H_{\max} = |H_0| \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \text{ pour } \omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \text{ (pulsation de résonance).}$$

Si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, l'amplification maximale est : $H_{\max} = |H_0|$.

- Si H_0 est positif, les asymptotes du diagramme de Bode de la phase sont :

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \varphi \rightarrow 0 \text{ rad}$$

$$\omega \rightarrow \infty, \quad \varphi \rightarrow -\pi \text{ rad}$$

✓ Filtre passe-haut du second ordre

- La fonction de transfert d'un **filtre passe-haut du second ordre** s'écrit sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{-H_0 x^2}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$$

où H_0 est un coefficient positif ou négatif, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, ω_0 la pulsation propre du filtre et Q le coefficient de qualité du filtre.

- Les asymptotes du diagramme de Bode du gain se coupent au point $(\omega_0, 20\log|H_0|)$. L'asymptote basses fréquences est une droite de pente $+40$ dB/décade et l'asymptote hautes fréquences est une droite horizontale d'équation $G = 20\log|H_0|$.

- Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, l'amplification maximale est alors :

$$H_{\max} = |H_0| \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \text{ pour } \omega_{\max} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} \text{ (pulsation de résonance).}$$

Si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, l'amplification maximale est : $H_{\max} = |H_0|$.

- Si H_0 est positif, les asymptotes du diagramme de Bode de la phase sont :

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \varphi \rightarrow \pi \text{ rad}$$

$$\omega \rightarrow \infty, \quad \varphi \rightarrow 0 \text{ rad}$$

✓ Filtre passe-bande du second ordre

- La fonction de transfert d'un filtre passe-bande du second ordre s'écrit sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

où H_0 est un coefficient positif ou négatif, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, ω_0 la pulsation propre du filtre et Q le coefficient de qualité du filtre.

- Les asymptotes du diagramme de Bode du gain se coupent au point $\left(\omega_0, 20\log\left(\frac{|H_0|}{Q}\right)\right)$.

L'asymptote basses fréquences est une droite de pente +20 dB/décade et l'asymptote hautes fréquences est une droite de pente -20 dB/décade.

- L'amplification maximale est alors :

$$H_{\max} = |H_0| \text{ pour } \omega_{\max} = \omega_0.$$

- Si H_0 est positif, les asymptotes du diagramme de Bode de la phase sont :

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$\omega \rightarrow \infty, \quad \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

- La bande passante est :

$$BP = [\omega_{c1} ; \omega_{c2}]$$

où ω_{c1} et ω_{c2} sont les pulsations de coupure du filtre telles que :

$$|\underline{H}(\omega_{c1})| = |\underline{H}(\omega_{c2})| = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}}, \text{ ce qui correspond au gain maximal } -3 \text{ dB.}$$

Le coefficient de qualité est tel que :

$$\frac{1}{Q} = \frac{|\omega_{c2} - \omega_{c1}|}{\omega_0}.$$

Mise en œuvre

Méthode n° 1

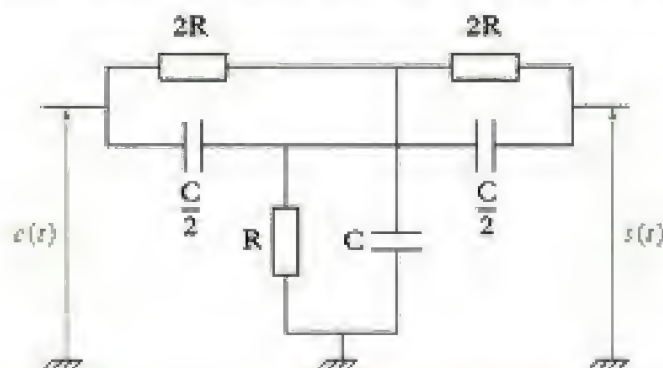
Comment prévoir la nature d'un filtre ?

→ Savoir faire

- ① Étudier le comportement basse fréquence du filtre. Pour cela, on remplace les condensateurs par des interrupteurs ouverts et les bobines par des interrupteurs fermés.
- ② Étudier le comportement haute fréquence du filtre. Pour cela, on remplace les condensateurs par des interrupteurs fermés et les bobines par des interrupteurs ouverts.
- ③ En déduire le comportement du filtre.

→ Application

Quelle est la nature du filtre suivant où l'entrée du filtre est notée $e(t)$ et la sortie $s(t)$?

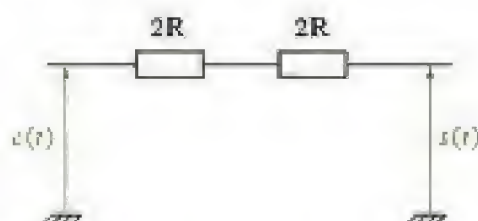


On rappelle un aspect de normalisation. Le condensateur de capacité C n'est pas relié au fil de connexion entre les condensateurs de capacité $\frac{C}{2}$. En effet, si tel était le cas, on aurait un point sur l'intersection des deux fils indiquant qu'il y a connexion :



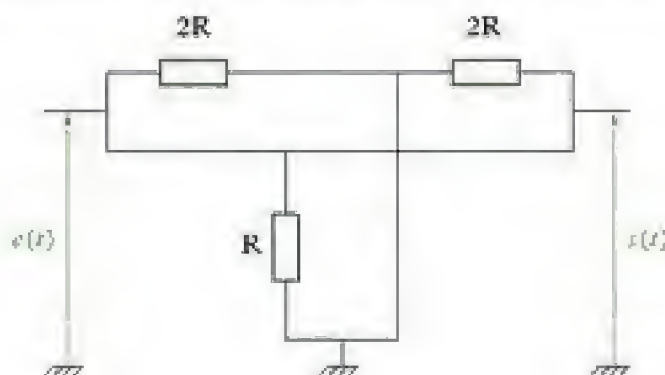
Solution

- ① Si on remplace les condensateurs par des interrupteurs ouverts, on obtient le montage équivalent suivant :



Il est évident que $e(t) = s(t)$ donc les basses fréquences sont intégralement transmises en sortie.

- ② Si on remplace les condensateurs par des interrupteurs fermés, on obtient le montage suivant :



Le montage est équivalent à :



Il est évident que $e(t) = s(t)$ donc les hautes fréquences sont intégralement transmises en sortie.

- ③ Les basses fréquences sont intégralement transmises, il s'agit alors d'un filtre type passe-bas ou coupe-bande, puisque le filtre passe-haut et le filtre passe-bande transmettent les basses fréquences avec une forte atténuation.

Les hautes fréquences sont intégralement transmises. Donc il ne s'agit pas d'un filtre passe-haut.

Ce filtre est un **filtre coupe-bande**.

Méthode n° 2

Comment tracer les diagrammes de Bode d'un filtre dont on connaît la fonction de transfert ?

→ Savoir faire

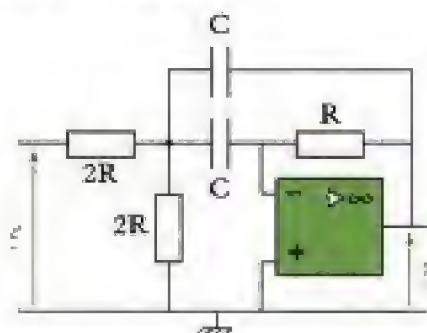
- ① Normaliser l'écriture de la fonction de transfert en fonction du type du filtre. On écrit les fonctions de transfert sous la forme :

$$\frac{H_0}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2} ; \frac{-H_0 x^2}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2} ; \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \text{ où } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

- ② Déterminer les valeurs de H_0 , Q le coefficient de qualité et ω_0 la pulsation propre du filtre.
 ③ Étudier le diagramme de Bode asymptotique du gain.
 ④ Déterminer le gain maximum et le gain à la pulsation propre.
 ⑤ Ébaucher le diagramme de Bode du gain.
 ⑥ Étudier le diagramme de Bode asymptotique de la phase.
 ⑦ Ébaucher le diagramme de Bode de la phase.

→ Application

Tracer les diagrammes de Bode du filtre suivant :



dont la fonction de transfert est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{2R^2C^2\omega^2 - 4jRC\omega - 2}$$

Solution

- ❶ On reconnaît la fonction de transfert d'un filtre de type passe-bande. (L'application de la méthode n°1 nous confirme cette conclusion).

Il faut normaliser l'écriture pour obtenir :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}, \quad \text{où } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

On fait apparaître un terme réel au numérateur :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{-2jRC\omega - 4 - \frac{2}{jRC\omega}}$$

On écrit le dénominateur sous forme d'un polynôme en $1 + \dots$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{-\frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{2}j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

- ❷ On déduit par identification les valeurs de H_0 , Q et ω_0 . On obtient :

$$H_0 = -\frac{1}{4}, \quad Q = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

- ❸ Les asymptotes du diagramme de Bode du gain sont :

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad G \rightarrow 20\log\left(\frac{RC}{2}\right) + 20\log(\omega)$$

$$\omega \rightarrow \infty, \quad G \rightarrow -20\log(2RC) - 20\log(\omega).$$

- ❹ Le maximum du gain est obtenu pour $\omega = \omega_0$ et vaut :

$$G_{\max} = -20\log 4 \approx -12 \text{ dB}.$$

- ❺ On trace d'abord les asymptotes sur une feuille semi-logarithmique.

Le diagramme de Bode réel est tangent aux asymptotes en basses et en hautes fréquences et passe par le point correspondant au maximum.

On obtient alors :

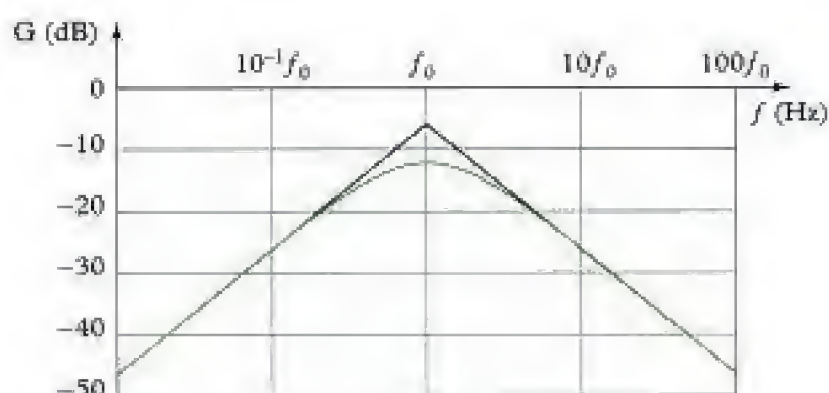


Diagramme de Bode du gain.

⑥ H_0 est négatif, on a :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} (\underline{H}(j\omega)) = -j \frac{RC\omega}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} (\underline{H}(j\omega)) = j \frac{1}{2RC\omega}.$$

Donc : $\omega \rightarrow 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \varphi \rightarrow \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$

$$\omega \rightarrow \infty, \quad \varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

⑦ On trace les asymptotes sur une feuille semi-logarithmique.

On passe de l'asymptote basse fréquence à l'asymptote haute fréquence pour $\omega = \omega_0$.

Le diagramme de Bode réel est tangent aux asymptotes en basses et hautes fréquences et passe par $\pi \text{ rad}$ pour $\omega = \omega_0$.

Le facteur de qualité est « faible » donc la courbe s'écarte des asymptotes autour de $\omega = \omega_0$.

On obtient alors :

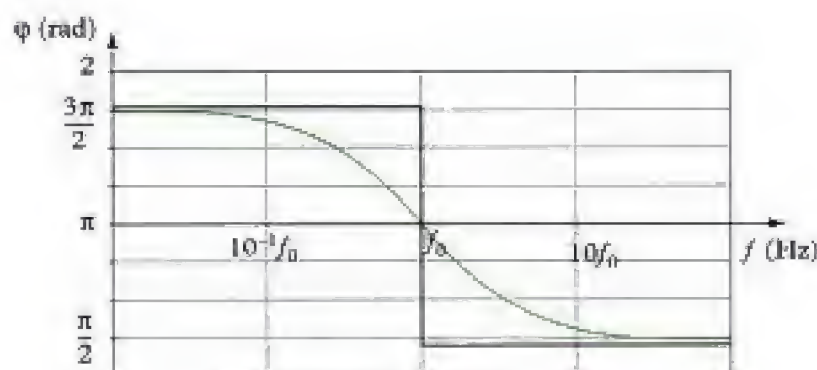


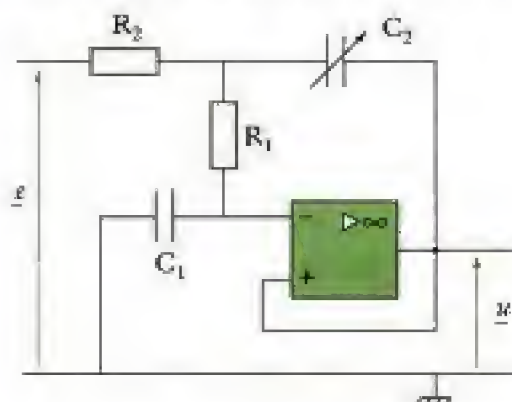
Diagramme de Bode de la phase.

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Filtre de Butterworth d'ordre 2

On étudie le montage ci-dessous où $e(t) = E\sqrt{2}\cos\omega t$:



- 1) Exprimer $\underline{T} = \frac{\underline{u}}{\underline{e}}$.
- 2) À quelle condition sur C_2 a-t-on :

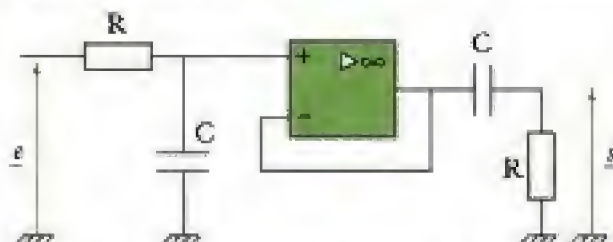
$$T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^4}{\omega_0^4}}}$$

- 3) Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques correspondants.

Oral, Mines sup 1998.

Ex. 2 Utilisation d'un A.O. suiveur

Dans le circuit ci-dessous, quel est le rôle de l'amplificateur opérationnel ?



Donner la fonction de transfert du filtre et les diagrammes de Bode.

Oral, Mines-Ponts, MP, 2003.

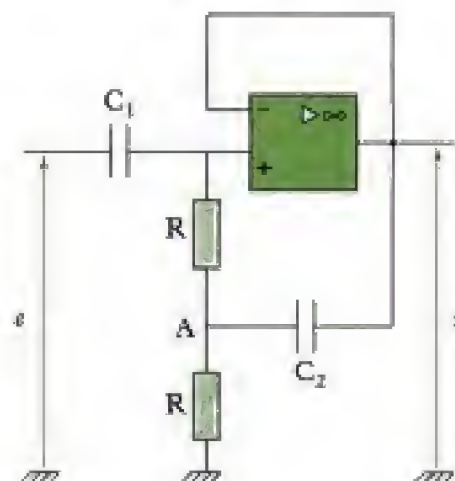
Ex. 3 Diagramme de Bode

Tracer les diagrammes de Bode du filtre dont la fonction de transfert est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j \cdot 10^{-2}\omega}{1 + j \cdot 2 \cdot 10^{-3}\omega - 10^{-4}\omega^2}$$

Niveau 2

Ex. 4 Soit le montage ci-contre :



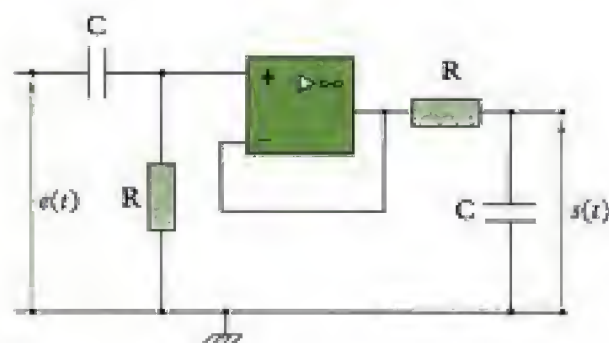
On prendra : $C_2 = 2C_1$.

- 1) Déterminer la nature du filtre.
- 2) Calculer sa fonction de transfert.
- 3) Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques.

Ex. 5 Filtre passe-bande

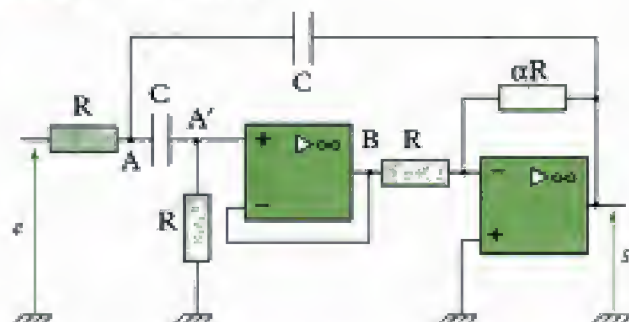
Nous considérons le circuit suivant comprenant deux résistances identiques et deux condensateurs identiques.

L'amplificateur opérationnel idéal fonctionne en régime linéaire, son gain direct est supposé infini (amplificateur parfait).



- 1) Donner l'expression de la fonction de transfert de ce circuit.
- 2) Étudier et tracer les courbes de gain et de phase dans le diagramme de Bode.
- 3) Calculer les fréquences de coupure et la bande passante à 3 dB.

Ex. 6 Soit le montage :

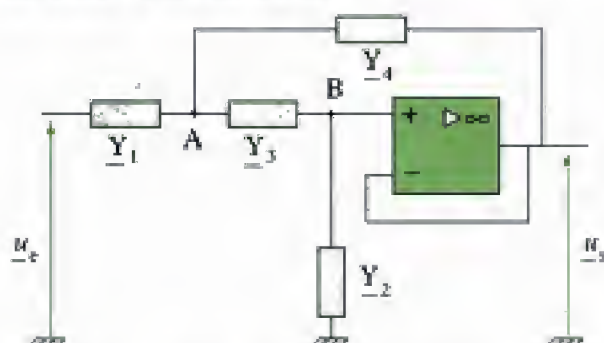


- 1) Examiner le comportement basse fréquence et haute fréquence du système proposé.
- 2) Déterminer la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{s}{e}$.
- 3) Tracer les diagrammes de Bode correspondants pour $\alpha = 10$.

Niveau 3

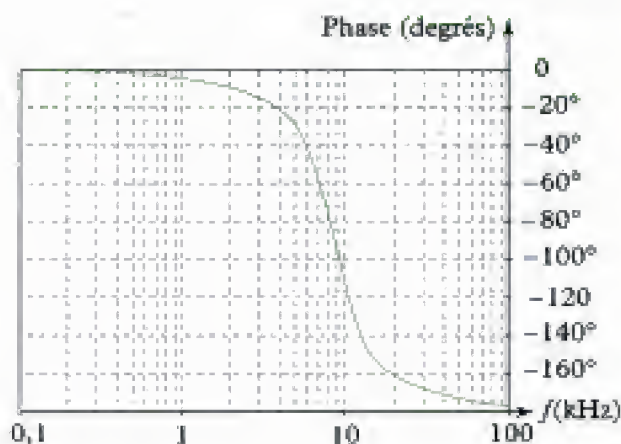
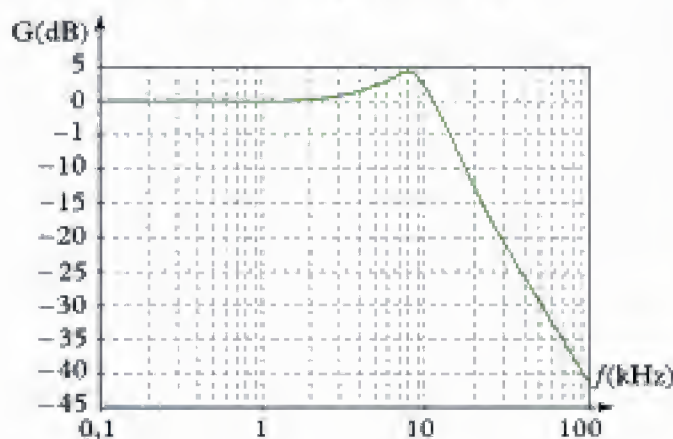
Ex. 7 Synthèse de filtre à partir d'une structure et du gabarit

On étudie la structure suivante où l'A.O. est idéal et fonctionne en régime linéaire :



Les admittances Y_i correspondent soit à des résistances soit à des condensateurs, le montage comportant deux résistances et deux condensateurs.

On donne ci-après les diagrammes de Bode :



- 1) Donner la valeur du gain statique (gain dans la bande passante), de la pulsation propre et du facteur de qualité.
- 2) Montrer que la fonction de transfert se met sous la forme :

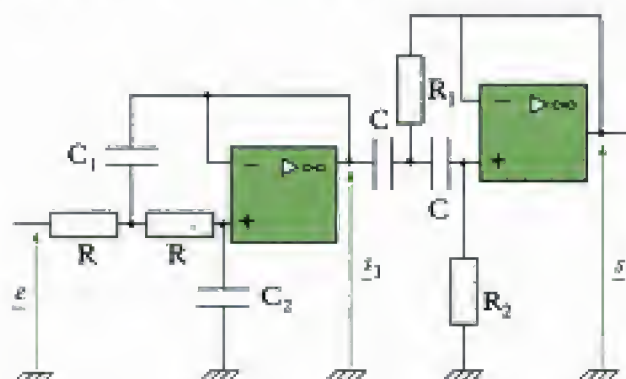
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{\underline{Y}_1 \cdot \underline{Y}_3}{\underline{Y}_2 \cdot (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) + \underline{Y}_1 \cdot \underline{Y}_3}$$

- 3) Identifier la nature des admittances.
- 4) Donner la valeur numérique des capacités des condensateurs sachant que les résistances ont pour valeur $R = 10 \text{ k}\Omega$.

Oral, CCP, PSI, 2002.

Ex. 8 Filtre téléphonique 300 – 3 200 Hz

Soit le montage suivant où les A.O. sont parfaits :



Données :

$R = 10 \text{ k}\Omega$; $R_1 = 8 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 16 \text{ k}\Omega$;

$C = 47 \text{ nF}$; $C_1 = 7 \text{ nF}$; $C_2 = 3,5 \text{ nF}$.

- 1) Exprimer les transmittances :

$$\underline{H}_1 = \frac{z_1}{e} \quad \text{et} \quad \underline{H}_2 = \frac{s}{z_1}$$

- 2) Déterminer la fonction de transfert \underline{H} du montage complet en justifiant la méthode employée.

Quelle est la nature du filtre ainsi réalisé ?

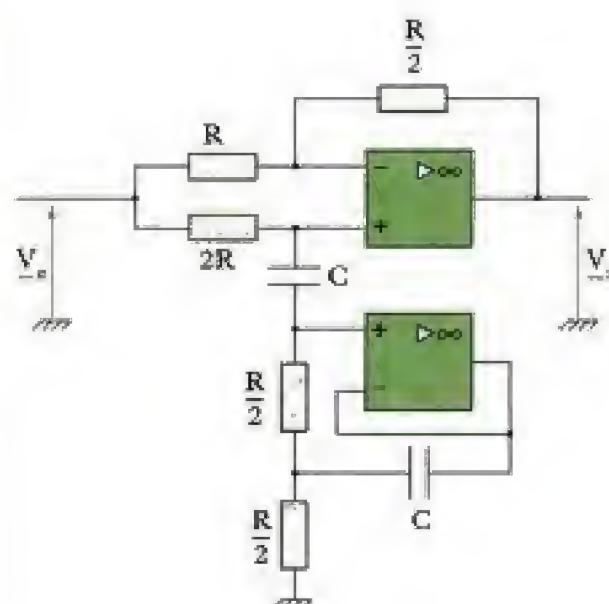
- 3) Représenter les diagrammes de Bode réels et asymptotiques associés à \underline{H} . Commenter.

Ex. 9 Filtre réjecteur de fréquences

Soit le montage ci-contre où les A.O. sont parfaits :

- 1) Déterminer la fonction de transfert.
- 2) Représenter le diagramme de Bode du gain.
- 3) Retrouver directement le comportement asymptotique.

Oral, Centrale-Supélec, 1996.



Indications

Ex. 4 3) On décompose la fonction de transfert en un produit de deux fonctions de transfert.

Ex. 5 3) Il faut d'abord étudier le maximum du gain.

Ex. 7 3) Pour un filtre tel que $Q = \frac{\sqrt{2}}{2}$, le gain est égal à $G_{\max} - 3$ dB pour la pulsation propre.

Ex. 8 2) On calcule les pulsations pour lesquelles :

$$|H| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}},$$

et on en déduit la bande coupée.

Ceci permet d'ébaucher le diagramme de Bode du gain.

3) Étudier le comportement aux limites du filtre.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

1) En nommant A le nœud commun aux dipôles R_1 , R_2 et C_2 , le théorème de Millman donne :

$$\underline{V}_A = \frac{\frac{e}{R_2} + jC_2\omega \cdot \underline{u} + \frac{u}{R_1}}{\frac{1}{R_2} + jC_2\omega + \frac{1}{R_1}} \quad (1) \quad (\text{car } e^+ = e^- = u \text{ pour l'A.O. supposé idéal}).$$

La loi des nœuds appliquée sur l'entrée inverseuse de l'A.O. fournit :

$$\frac{V_A - u}{R_1} + \frac{0 - u}{\frac{1}{jC_1\omega}} = \underline{i}^- \quad \text{avec } \underline{i}^- = 0 \text{ (A.O. idéal)}$$

$$\Leftrightarrow V_A - u = jR_1C_1\omega \cdot u \Leftrightarrow V_A = u(1 + jR_1C_1\omega) \quad (2)$$

(1) et (2) donnent :

$$\begin{aligned} u \cdot (1 + jR_1C_1\omega) &= \frac{\frac{e}{R_2} + jC_2\omega \cdot \underline{u} + \frac{u}{R_1}}{\frac{1}{R_2} + jC_2\omega + \frac{1}{R_1}} \Leftrightarrow u \cdot \left[(1 + jR_1C_1\omega) \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} + jC_2\omega \right) - jC_2\omega - \frac{1}{R_1} \right] = \frac{e}{R_2} \\ &\Leftrightarrow \left[\underline{T} = \frac{u}{e} = \frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\frac{R_1 + R_2}{R_2}C_1\omega + R_1R_2C_1C_2(j\omega)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\underline{T} = \frac{1}{1 + j(R_1 + R_2)C_1\omega + R_1R_2C_1C_2(j\omega)^2}$$

2) On commence par calculer $|\underline{T}|$:

$$|\underline{T}| = \frac{1}{\sqrt{(1 - R_1R_2C_1C_2\omega^2)^2 + [(R_1 + R_2)C_1\omega]^2}}$$

avec :

$$(1 - R_1R_2C_1C_2\omega^2)^2 + [(R_1 + R_2)C_1\omega]^2 = 1 + (R_1R_2C_1C_2\omega^2)^2 - 2R_1R_2C_1C_2\omega^2 + (R_1R_2)^2C_1^2\omega^2.$$

Si on pose alors $f(\omega) = 2R_1R_2C_1C_2\omega^2 + (R_1 + R_2)^2C_1^2\omega^2$, on constate que si $f(\omega) = 0$ alors il est possible d'écrire $|\underline{T}|$ sous la forme proposée à condition de poser :

$$1 + (R_1R_2C_1C_2\omega^2)^2 = 1 + \frac{\omega^4}{\omega_0^4}.$$

Ce qui donne par identification $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}$.

Il faut donc chercher à quelle condition on a $f(\omega) = 0$:

$$2R_1R_2C_1C_2\omega^2 + (R_1 + R_2)^2C_1^2\omega^2 = 0 \Leftrightarrow 2R_1R_2C_2 = C_1 \cdot (R_1 + R_2)^2$$

$$\Leftrightarrow C_2 = \frac{(R_1 + R_2)^2 \cdot C_1}{2R_1R_2} = \frac{R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2}{2R_1R_2} \cdot C_1$$

d'où :

$$C_2 = \left(1 + \frac{R_1^2 + R_2^2}{2R_1R_2} \right) \cdot C_1 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}$$

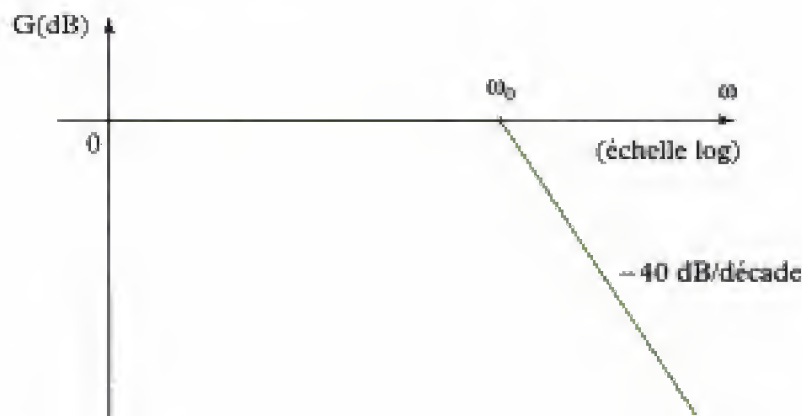
3) On met en œuvre la méthode n° 2 :

$$|T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}} \Rightarrow G_{dB} = -10 \cdot \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \right].$$

Si $\omega \rightarrow 0$: $G_{dB} \rightarrow 0$ dB.

Si $\omega \rightarrow +\infty$: $G_{dB} \rightarrow -40 \cdot \log \omega + 40 \cdot \log \omega_0$.

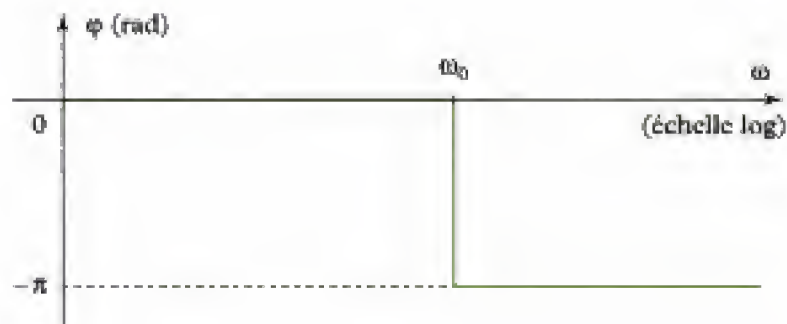
D'où :



En notant φ l'argument de $T(j\omega)$, on a :

- si $\omega \rightarrow 0$: $\varphi \rightarrow \text{Arctan}(1) = 0$;
- si $\omega \rightarrow \infty$: $\varphi \rightarrow \text{Arg} \left[\frac{1}{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right] = -\pi$ modulo 2π .

d'où :



Exercice 2

1) • L'A.O. permet d'isoler les deux cellules R-C, en amont, et C-R en aval, qui constituent deux filtres en cascade dont on peut ainsi multiplier les fonctions de transfert pour obtenir la fonction de transfert de l'ensemble du montage.

• Fonction de transfert

L'A.O. étant supposé idéal, en appliquant le diviseur de tension, il vient :

$$\underline{H}_1 = \frac{e^+}{e^-} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \quad (\text{passe-bas de 1^{er} ordre})$$

$$\underline{H}_2 = \frac{s}{e^+} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \quad (\text{passe-haut de 1^{er} ordre}).$$

D'où $\underline{H} = \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2$ soit :

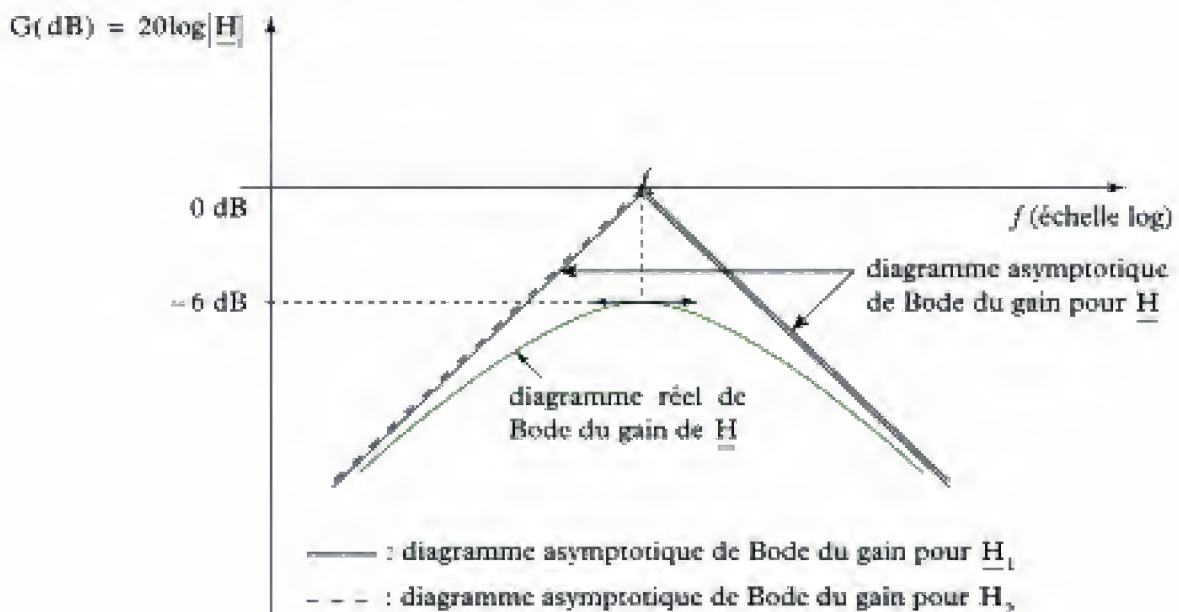
$$\underline{H} = \frac{jRC\omega}{(1 + jRC\omega)^2}$$

• Diagrammes de Bode

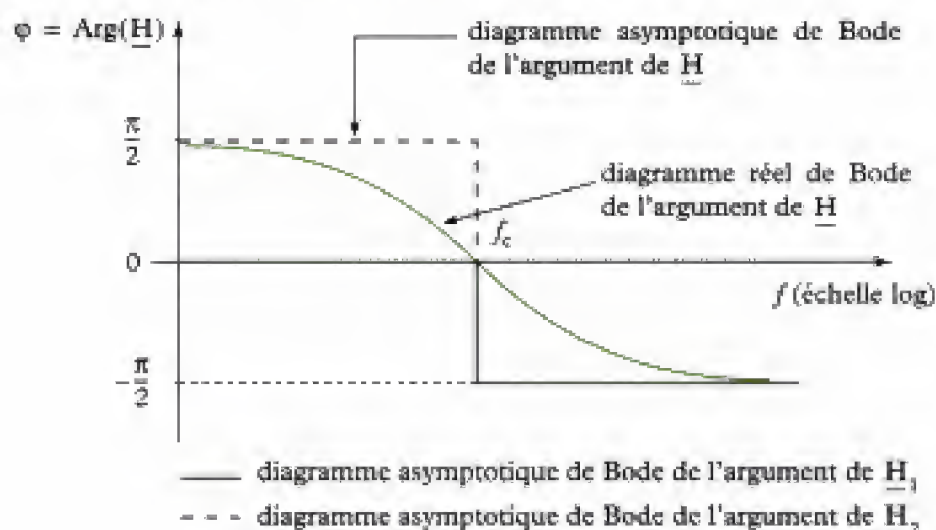
On commence par tracer les diagrammes de Bode asymptotiques du filtre passe-bas et du filtre passe-haut qui ont la même fréquence de coupure :

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

On en déduit ensuite le gain G (en dB) des diagrammes asymptotiques de \underline{H}_1 et \underline{H}_2 :



De même on déduit le diagramme de Bode de l'argument φ de \underline{H} en additionnant ceux de \underline{H}_1 et \underline{H}_2 :



Exercice 3

On met en œuvre la méthode n° 2.

On reconnaît la fonction de transfert d'un filtre de type passe-bande.

Il faut normaliser l'écriture pour obtenir :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}, \quad \text{où } x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Dans ce cas, $H_0 = 5$, $\omega_0 = 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $Q = 5$.

Donc :

$$\underline{H}(j\omega) = 5 \frac{1}{1 + 5j\left(10^{-2}\omega - \frac{1}{10^{-2}\omega}\right)},$$

Diagramme de Bode du gain

Les asymptotes du diagramme de Bode du gain sont :

- pour $\omega \rightarrow 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $G \rightarrow -40 + 20\log(\omega)$;
- pour $\omega \rightarrow \infty$, $G \rightarrow 40 - 20\log(\omega)$.

Les asymptotes se coupent au point $(10^2 ; 0)$.

Le maximum du gain est obtenu pour $\omega = \omega_0$ et vaut :

$$G_{\max} = 20\log(5) = 14 \text{ dB}.$$

On trace d'abord les asymptotes sur une feuille semi-logarithmique.

Le diagramme de Bode réel est tangent aux asymptotes en basses et en hautes fréquences et passe par le point correspondant au maximum.

On obtient alors :

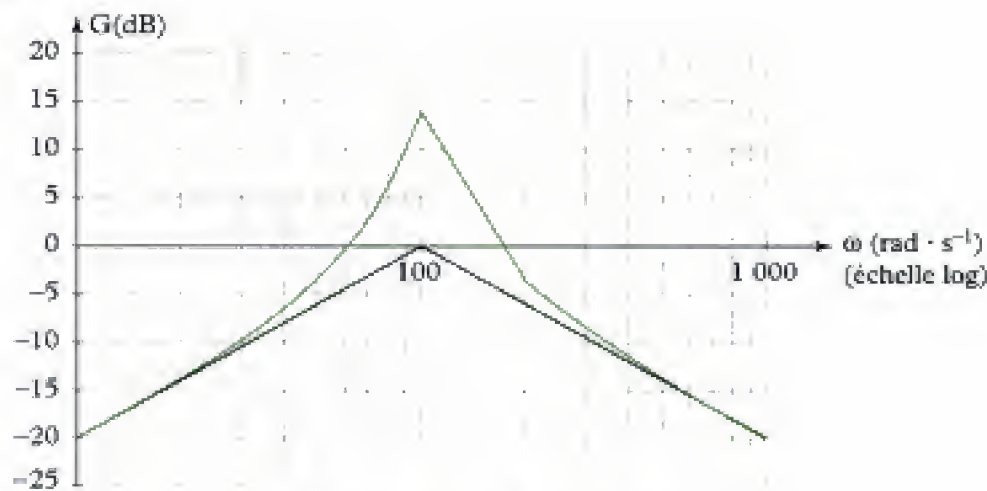


Diagramme de Bode du gain.

Diagramme de Bode de la phase

H_0 est positif, on a donc :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} (\underline{H}(j\omega)) = j10^{-2}\omega \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} (\underline{H}(j\omega)) = -j\frac{1}{10^{-2}\omega}.$$

Donc :

- pour $\omega \rightarrow 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ ou 90° ;
- pour $\omega \rightarrow \infty$, $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ ou -90° .

On trace les asymptotes sur une feuille semi-logarithmique.

On passe de l'asymptote basse fréquence à l'asymptote haute fréquence pour $\omega = \omega_0$.

Le diagramme de Bode réel est tangent aux asymptotes en basses et hautes fréquences et passe par 0 rad ou 0° pour $\omega = \omega_0$.

Le facteur de qualité est supérieur à 1 donc la courbe s'écarte peu des asymptotes autour de $\omega = \omega_0$.

On obtient alors :

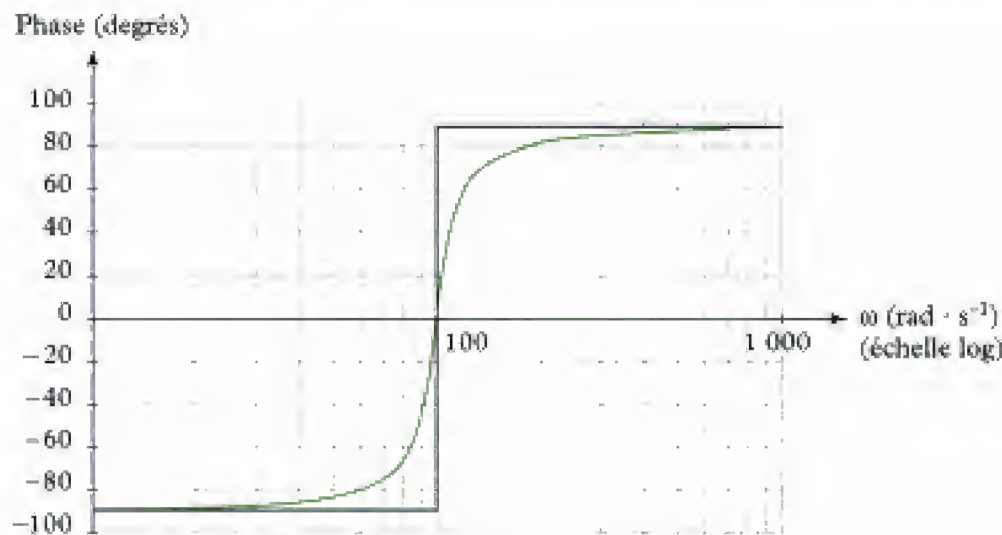


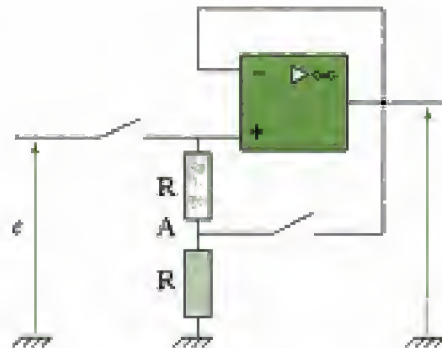
Diagramme de Bode de la phase.

Exercices de niveau 2

Exercice 4

1) On met en œuvre la méthode n° 1.

• En basses fréquences, les condensateurs sont assimilés à des interrupteurs ouverts. Ce qui donne le montage équivalent suivant :

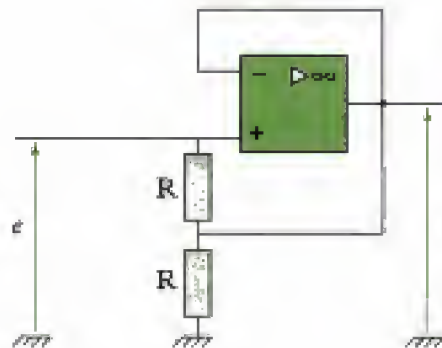


Les résistances R sont reliées à la masse et l'amplificateur opérationnel est idéal.

Donc : $s = 0 \text{ V}$.

• Le montage ne laisse pas passer les basses fréquences. »

• En hautes fréquences, les condensateurs sont assimilés à des interrupteurs fermés. Ce qui donne le montage équivalent suivant :



L'amplificateur opérationnel est idéal.

Donc : $s = \epsilon$.

• Le montage laisse passer les hautes fréquences. »

Il s'agit donc d'un **filtre passe-haut**.

2) On applique le théorème de Millman en A pour obtenir :

$$V_A = \frac{\frac{s}{R} + jC_2\omega s}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + jC_2\omega} \quad (1)$$

car l'amplificateur opérationnel est idéal.

Le théorème de Millman appliqué sur l'entrée non inverseuse de l'amplificateur opérationnel donne :

$$\underline{\underline{s}} = \frac{jC_1\omega \underline{\underline{e}} + \frac{V_A}{R}}{\frac{1}{R} + jC_1\omega} \quad (2)$$

car $i^+ = 0$ A pour l'amplificateur opérationnel idéal.

En utilisant les équations (1) et (2), on obtient :

$$\underline{\underline{s}} = \frac{jRC_1\omega \underline{\underline{e}} + \frac{s + jRC_2\omega s}{2 + jRC_2\omega}}{1 + jRC_1\omega}$$

$$\text{D'où } \underline{\underline{\frac{s}{e}}} = \frac{jRC_1\omega(2 + jRC_2\omega)}{(1 + jRC_1\omega)(2 + jRC_2\omega) - (1 + jRC_2\omega)}$$

Soit :

$$\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{\frac{s}{e}}} = \frac{2jRC_1\omega \left(1 + j\frac{RC_2}{2}\omega\right)}{1 + 2jRC_1\omega - R^2C_1C_2\omega^2}$$

3) La fonction de transfert peut se décomposer en produit d'une fonction de transfert du 2nd ordre et d'une fonction de transfert du 1^{er} ordre :

$$\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{H}}_1 \cdot \underline{\underline{H}}_2 \quad \text{où} \quad \underline{\underline{H}}_1 = \frac{2jRC_1\omega}{1 + 2jRC_1\omega - R^2C_1C_2\omega^2} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{H}}_2 = 1 + j\frac{RC_2}{2}\omega.$$

On met en œuvre la méthode n° 2.

Dans cet exercice, on ne cherche que le diagramme asymptotique, il n'est pas alors nécessaire de déterminer le maximum du gain.

• **Le diagramme de Bode asymptotique du gain** est la somme des diagrammes de Bode asymptotiques du gain pour $\underline{\underline{H}}_1$ et $\underline{\underline{H}}_2$.

→ Pour $\underline{\underline{H}}_1$;

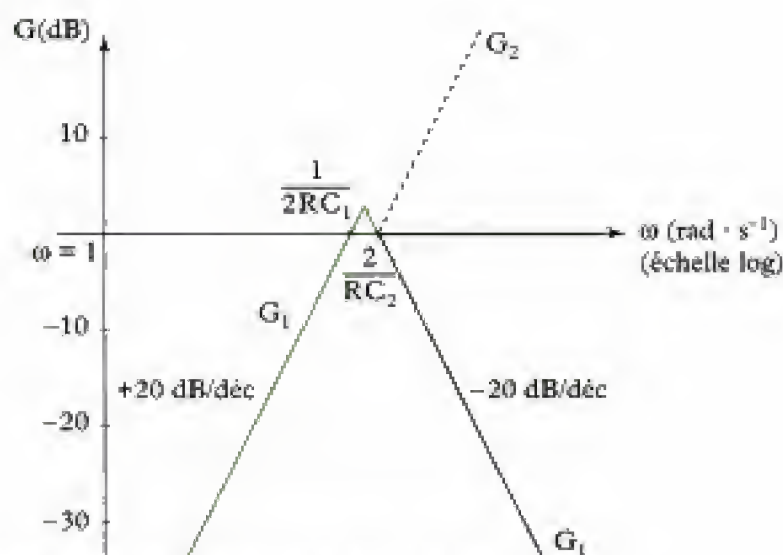
- pour $\omega \rightarrow 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $G_1 \rightarrow 20\log(2RC_1) + 20\log(\omega)$;

- pour $\omega \rightarrow +\infty$, $G_1 \rightarrow 20\log\left(\frac{2}{RC_2}\right) - 20\log(\omega)$;

→ Pour $\underline{\underline{H}}_2$;

- pour $\omega \rightarrow 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $G_2 \rightarrow 0\text{dB}$;

- pour $\omega \rightarrow +\infty$, $G_2 \rightarrow 20\log\left(\frac{RC_2}{2}\right) + 20\log(\omega)$.



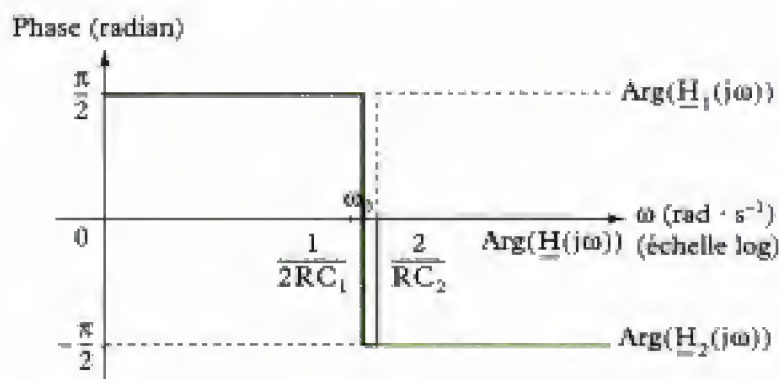
• **Diagramme de Bode asymptotique pour la phase**

$$\rightarrow \text{Pour } \underline{H}_1, \begin{cases} \text{pour } \omega \rightarrow 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \text{Arg}(\underline{H}_1(j\omega)) \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \text{pour } \omega \rightarrow +\infty, \text{Arg}(\underline{H}_1(j\omega)) \rightarrow -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Le changement de valeur s'effectue pour $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R^2 C_1 C_2}}$.

$$\rightarrow \text{Pour } \underline{H}_2, \begin{cases} \text{pour } \omega \rightarrow 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \text{Arg}(\underline{H}_2(j\omega)) \rightarrow 0 \\ \text{pour } \omega \rightarrow +\infty, \text{Arg}(\underline{H}_2(j\omega)) \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Le changement de valeurs s'effectue pour $\omega = \frac{2}{RC_2}$



Exercice 5

1) Détermination de la fonction de transfert

Nous notons e^+ , e^- , i^+ , i^- les intensités au niveau des entrées non-inverseuse (+) et inverseuse (-) de l'amplificateur opérationnel. Nous notons également u la tension à la sortie de cet amplificateur. Nous avons 6 inconnues : e^+ , e^- , i^+ , i^- , u et s . Il nous faut donc 6 équations indépendantes.

La mise en équation de l'amplificateur parfait (gain direct infini) nous donne trois équations :

$$\begin{cases} i^+ = i^- = 0 \\ e^+ = e^- \end{cases}$$

La mise en équation du circuit doit nous donner 3 autres équations. Nous pouvons exprimer la tension sur l'entrée non-inverseuse en fonction de la tension $e(t)$:

$$\underline{e}^+ = \frac{R}{R + \underline{Z}_C} \underline{e}.$$

où \underline{Z}_C représente l'impédance du condensateur. Nous avons implicitement utilisé le fait que l'intensité i^+ est nulle pour écrire la relation d'un pont diviseur de tension.

L'entrée inverseuse est connectée à la sortie de l'amplificateur, donc : $e^- = u$.

Si le circuit ne débite aucun courant en sortie (sortie ouverte) nous pouvons également utiliser la relation du pont diviseur de tension pour relier la tension en sortie $s(t)$ à la tension $u(t)$:

$$\underline{s} = \frac{\underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_C} \underline{u}.$$

Les 3 premières équations portant sur les tensions nous permettent d'exprimer u en fonction de e :

$$\underline{u} = \underline{e}^- = \underline{e}^+ = \frac{R}{R + \underline{Z}_C} \underline{e}.$$

En reportant dans la dernière équation nous pouvons obtenir une relation entre les tensions d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ du circuit :

$$\underline{s} = \frac{\underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_C} \times \frac{R}{R + \underline{Z}_C} \underline{e} = \frac{R \underline{Z}_C}{(R + \underline{Z}_C)^2} \underline{e}.$$

Nous avons donc pour la fonction de transfert harmonique du circuit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{R \underline{Z}_C}{(R + \underline{Z}_C)^2}.$$

Nous pouvons maintenant remplacer l'impédance \underline{Z}_C par son expression, il vient :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R \frac{1}{jC\omega}}{\left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)^2} = \frac{jRC\omega}{(1 + jRC\omega)^2}.$$

Introduisons la pulsation caractéristique du circuit ω_0 et la variable réduite x :

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad \text{et} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Nous pouvons réécrire la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(1 - j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{jx}{(1 + jx)^2}.$$

2) On met en œuvre la méthode n° 2.

Diagramme de Bode

La fonction de transfert \underline{H} peut être décomposée comme un produit de fonctions de transfert du premier ordre :

$$\underline{H}(j\omega) = \underline{H}_1(j\omega) \underline{H}_2(j\omega) \quad \text{avec} \quad \underline{H}_1(j\omega) = jx \quad \text{et} \quad \underline{H}_2(j\omega) = \frac{1}{1 + jx}.$$

Celles-ci ont pour modules :

$$H_1(x) = x \text{ et } H_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Le gain en décibels est la somme des gains, ce qui nous donne :

$$G(\text{dB}) = G_1(\text{dB}) + 2G_2(\text{dB}) \text{ avec } G_1(\text{dB}) = 20\log x \text{ et } G_2(\text{dB}) = -10\log(1+x^2)$$

$$G(\text{dB}) = 20\log x - 20\log(1+x^2).$$

Le premier terme est une droite de pente 20 dB/décade coupant l'axe horizontal en $x = 1$.

Déterminons le diagramme asymptotique du second terme :

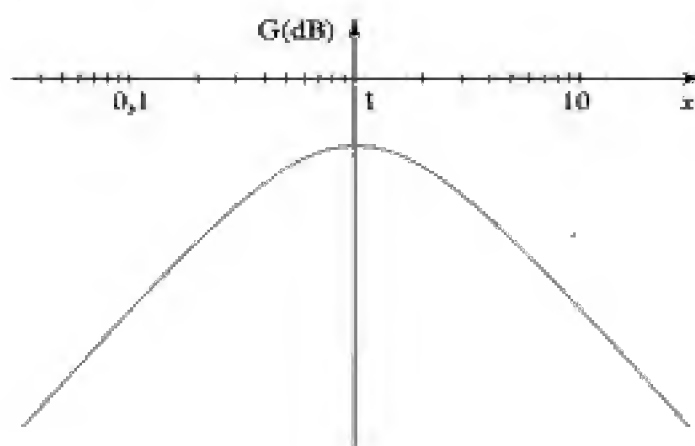
$$\begin{cases} x \rightarrow 0 & -20\log(1+x^2) \approx -20\log 1 = 0 \\ x \rightarrow +\infty & -20\log(1+x^2) \approx -40\log x \end{cases}$$

Nous avons, pour le second terme, deux asymptotes : l'axe horizontal lorsque x tend vers 0 et une droite de pente -40 dB/décade lorsque x tend vers l'infini. Ces deux asymptotes se coupent en $x = 1$ (ω_0 est une pulsation de brisure).

Nous pouvons donc construire le diagramme asymptotique du gain $G(\text{dB})$.

$$\begin{cases} x \rightarrow 0 & G(\text{dB}) \approx 20\log x + 0 = 20\log x \\ x \rightarrow +\infty & G(\text{dB}) \approx 20\log x - 40 = -20\log x \end{cases}$$

Nous avons donc deux asymptotes coupant l'axe horizontal en $x = 1$, l'une de pente 20 dB/décade, l'autre de pente -20 dB/décade.



Il s'agit d'un filtre passe-bande.

Intéressons-nous maintenant à la courbe de phase. Pour le numérateur nous avons :

$$H_1(j\omega) = jx = xe^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \phi_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Pour déterminer l'argument de H_2 nous pouvons écrire :

$$H_2(jx) = \frac{1-jx}{1+x^2} \Rightarrow \phi_2 = -\arctan x.$$

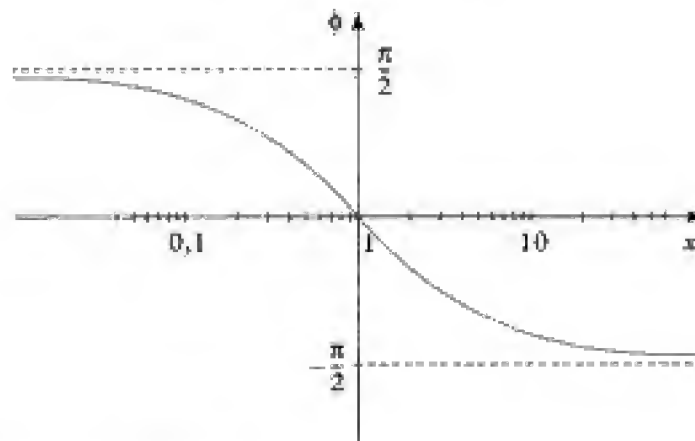
En effet l'argument est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0, puisque les parties réelle et imaginaire de la fonction de transfert sont respectivement positive et négative.

Nous avons donc pour la phase globale :

$$\phi = \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctan} x.$$

Recherchons les asymptotes aux basses et hautes fréquences :

$$\begin{cases} x \rightarrow 0 & \phi \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x \rightarrow +\infty & \phi \rightarrow -\frac{\pi}{2} \end{cases}.$$



3) Détermination de la bande passante

Commençons par chercher le maximum du gain. Dérivons le gain en décibels par rapport à x , il vient :

$$\frac{dG(\text{dB})}{dx} = \frac{20}{\ln 10} \frac{1}{x} - \frac{20}{\ln 10} \frac{2x}{1+x^2} = \frac{20}{\ln 10} \frac{1+x^2-2x^2}{x(1+x^2)} = \frac{20}{\ln 10} \frac{1-x^2}{x(1+x^2)}.$$

Celle-ci s'annule pour $x = 1$. le gain est maximum pour $\omega = \omega_0$, celui-ci ayant pour expression :

$$H(x) = \frac{x}{1+x^2},$$

le maximum est égal à :

$$H_{\max} = H(x=1) = \frac{1}{2} \Rightarrow G_{\max}(\text{dB}) = -20 \log 2 = -6 \text{ dB}.$$

Pour déterminer les limites de la bande passante à 3 dB, nous cherchons x tel que :

$$H(x) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}.$$

Nous devons résoudre :

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

qui correspond à une équation du deuxième ordre :

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0,$$

qui a pour discriminant réduit $\Delta' = 2 - 1 = 1$, et admet deux racines positives :

$$x_{\pm} = \sqrt{2} \pm 1.$$

Les deux fréquences de coupure du filtre sont donc :

$$\begin{cases} \omega_b = (\sqrt{2} - 1)\omega_0 \\ \omega_h = (\sqrt{2} + 1)\omega_0 \end{cases}.$$

La bande passante a pour largeur :

$$\Delta\omega = 2\omega_0.$$

Remarquons d'autre part, qu'en échelle logarithmique, la bande passante est centrée sur ω_0 (ou $x = 1$).

On vérifie en effet que :

$$\omega_b \omega_h = \omega_0^2.$$

Ce qui nous donne :

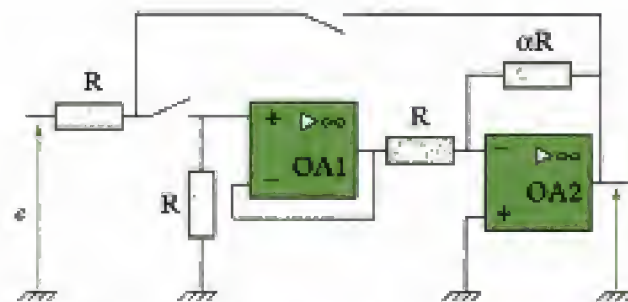
$$\log \omega_0 = \frac{1}{2}(\log \omega_b + \log \omega_h).$$

Exercice 6

1) On met en œuvre la méthode n° 1

• **En basse fréquence**, les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts.

Ce qui donne :

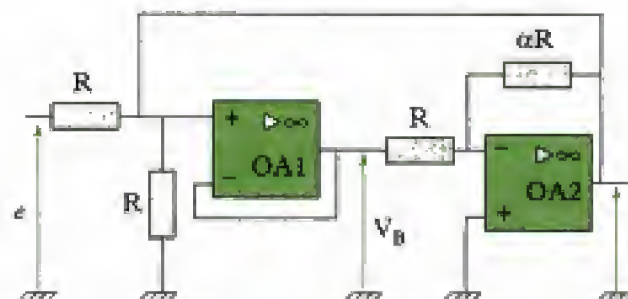


L'entrée non-inverseuse de l'AO1 est reliée à la masse par l'intermédiaire de la résistance R. Donc la tension sur cette entrée est nulle, ce qui entraîne :

$$s(t) = 0 \text{ V}$$

• **En haute fréquence**, les condensateurs se comportent comme des interrupteurs fermés.

Ce qui donne :



L'entrée non-inverseuse de l'OA1 est au potentiel de la sortie $s(t)$. l'AO1 est monté en suiveur ($V_B = V^- = V^+$) donc $V_B(t) = s(t)$.

Si on applique le théorème de Millman sur l'entrée inverseuse de l'AO2, on obtient :

$$V^-(t) = \frac{\frac{s(t)}{\alpha R} + \frac{s(t)}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{\alpha R}}.$$

Or l'AO2 est idéal.

Donc $V^-(t) = V^+(t) = 0$.

Ce qui conduit à

$$\frac{s(t)}{\alpha R} + \frac{s(t)}{R} = 0.$$

On en déduit

$$s(t) = 0 \text{ V}$$

• Donc le montage coupe les basses fréquences et les hautes fréquences.

Il s'agit alors d'un montage passe-bande.

2) Pour calculer la fonction de transfert, on applique :

• le théorème de Millman au point A :

$$\underline{V}_A = \frac{j\underline{V}'_A C\omega + \frac{\varepsilon}{R} + jC\omega \underline{s}}{\frac{1}{R} + 2jC\omega} \quad (1)$$

• la formule du diviseur de tension au point A (car le courant entrant dans l'AO1 est nul) :

$$\underline{V}'_A = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{V}_A \quad (2)$$

• le théorème de Millman en D ($V_D = 0$ car l'AO2 est parfait) :

$$\underline{V}_D = 0 = \frac{\underline{V}_B}{\frac{1}{R} + \frac{1}{\alpha R}} + \frac{\underline{s}}{\alpha R} \quad (3)$$

De plus, l'AO1 est idéal donc $\underline{V}_B = \underline{V}'_A$.

L'équation (3) donne : $\underline{V}_B = -\frac{\underline{s}}{\alpha} = \underline{V}'_A$

L'équation (2) donne : $\underline{V}_A = \frac{1 + jRC\omega}{jRC\omega} \underline{V}'_A = -\frac{(1 + jRC\omega)}{j\alpha RC\omega} \underline{s}$.

Donc par substitution dans l'équation (1), on obtient :

$$-\frac{(1 + jRC\omega)}{j\alpha RC\omega} \underline{s} = \frac{-j\frac{C\omega}{\alpha} \underline{s} + \frac{\varepsilon}{R} + jC\omega \underline{s}}{\frac{1}{R} + 2jC\omega}$$

Ce qui conduit à :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{\varepsilon}} = \frac{-\frac{\alpha}{3}}{1 + \frac{1}{3}j\left[(\alpha + 1)RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right]}$$

3) On met en œuvre la méthode n° 2

Si on écrit cette fonction de transfert sous forme normalisée, on obtient :

$$H = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha + 1}RC}, \quad Q = \sqrt{\alpha + \frac{1}{3}} \text{ et } H_0 = -\frac{\alpha}{3}.$$

Le diagramme de Bode asymptotique est constitué d'une asymptote haute fréquence de pente -20 dB/décade et d'une asymptote basse fréquence de pente $+20$ dB/décade.

Ces deux droites se coupent au point $\left(\omega_0 ; 20\log\left(\frac{\alpha}{3}\right) - 20\log(Q)\right)$.

Le diagramme de Bode réel est tangent aux asymptotes et passe par le point $\left(\omega_0 ; 20\log\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right)$ où le gain est maximum.

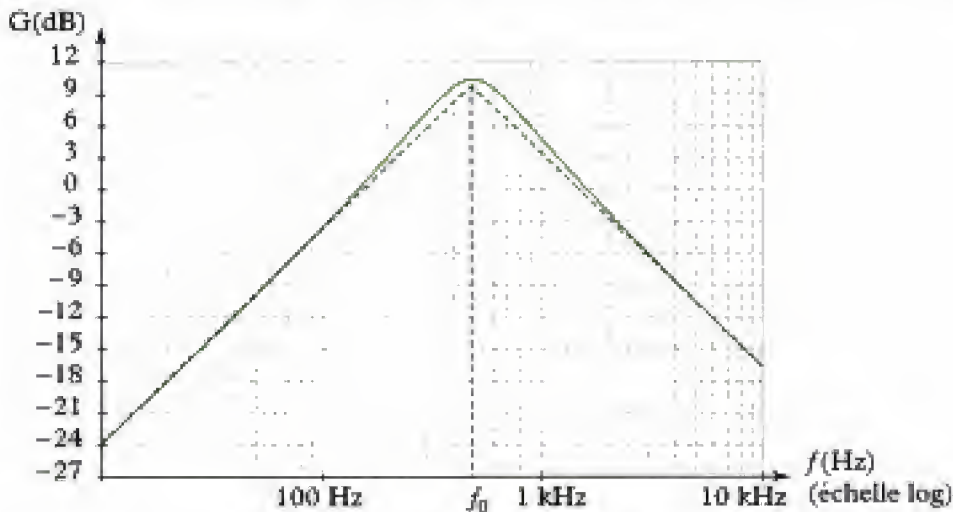


Diagramme de Bode du gain.

Le diagramme de Bode asymptotique de la phase est constitué :

- d'une asymptote à $-\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ pour des pulsations inférieures à ω_0 ;
- d'une asymptote à $-\frac{3\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$ pour des pulsations supérieures à ω_0 .

Pour choisir, il faut étudier les variations de la phase.

La partie réelle du dénominateur est toujours positive et sa partie imaginaire passe de $-\infty$ à $+\infty$. Donc son argument évolue de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$.

Donc l'argument de la fonction de transfert est une fonction décroissante de ω .

Donc la phase varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{3\pi}{2}$ ou de $\frac{3\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$.

On choisit l'intervalle allant de $\frac{3\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire 270° à 90° .

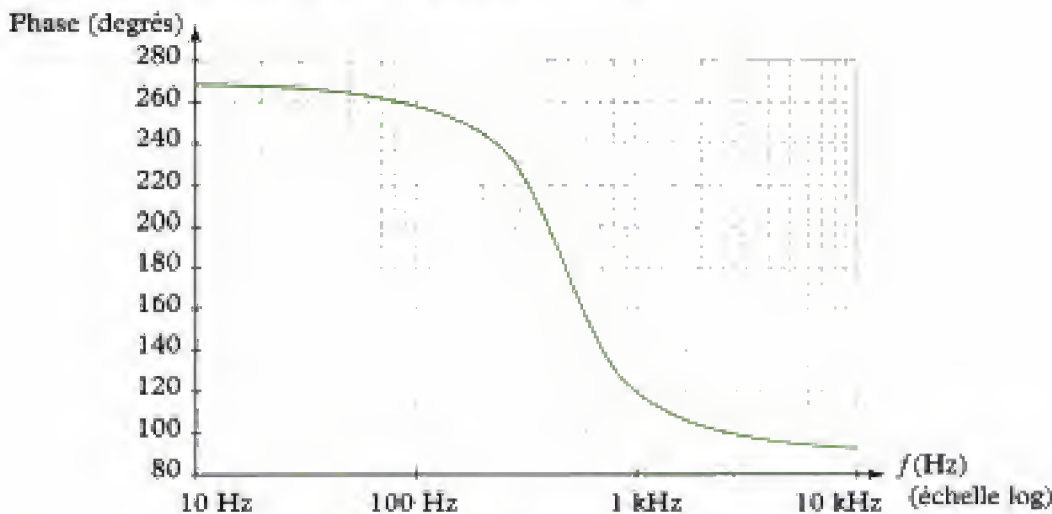


Diagramme de Bode du phase.

Exercices de niveau 3

Exercice 7

1) • Détermination de H_0

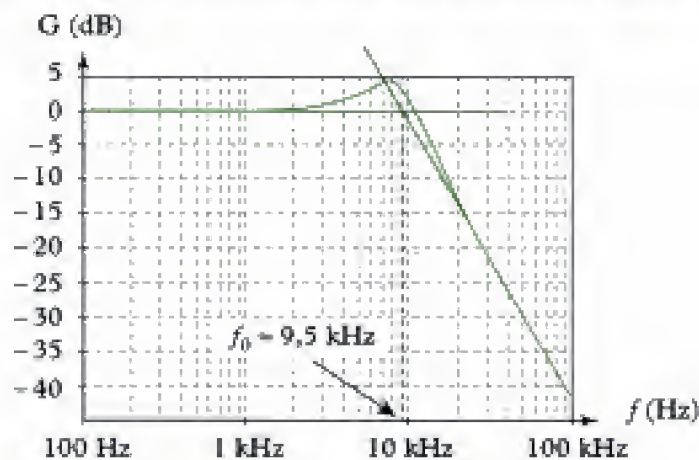
Sur le diagramme de Bode du gain, on lit :

$$H_0(\text{dB}) = 0 \Rightarrow H_0 = 1.$$

• Détermination de la pulsation propre

On commence par déterminer l'ordre du filtre. Dans la bande coupée, pour les fréquences élevées, la tangente au diagramme réel du gain est une droite de pente -40 dB/décade. Il s'agit donc d'un filtre du deuxième ordre.

La fréquence propre f_0 est donc située à l'intersection des asymptotes basses et hautes fréquences :



On lit ainsi $f_0 = 9,5 \text{ kHz}$, d'où l'on déduit la valeur de ω_0 grâce à :

$$\omega_0 = 2\pi f_0.$$

A.N. : $\omega_0 = 59\,690 \text{ Hz}$.

• Détermination du facteur de qualité

On commence par rechercher la valeur du gain maximal G_{\max} sur le diagramme de Bode du gain : on lit $G_{\max} = 4,4 \text{ dB}$. Puis on détermine graphiquement les deux fréquences de coupure à -3 dB (pour lesquelles $G(\text{dB}) = G_{\max} - 3 \text{ dB} = 1,4 \text{ dB}$). On trouve :

$$f_1 = 4\,020 \text{ Hz} \text{ et } f_2 = 10,6 \text{ kHz}.$$

Ce qui donne une largeur de bande passante $\Delta f = f_2 - f_1 = 6,58 \text{ kHz}$. Ainsi, le facteur de qualité Q s'écrit :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f}.$$

$$\text{A.N. : } Q = \frac{9\,500}{6\,580} = 1,44.$$

2) On applique la méthode 1 :

$$\underline{V}_A = \frac{\underline{Y}_1 \cdot \underline{u}_e + \underline{Y}_3 \cdot \underline{V}_B + \underline{Y}_4 \cdot \underline{u}_s}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4} \quad (1) \text{ (Millman en A)}$$

$$\underline{V}_B = \frac{\underline{Y}_3}{\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \cdot \underline{V}_A \quad (2) \text{ (diviseur de tension en B)}$$

$$\underline{V}_B = \underline{u}_s \quad (3)$$

(1), (2), (3) donnent :

$$\frac{\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}{\underline{Y}_3} \cdot \underline{u}_s = \frac{\underline{Y}_1 \cdot \underline{u}_e + \underline{Y}_3 \cdot \underline{u}_s + \underline{Y}_4 \cdot \underline{u}_s}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4}$$

$$\Leftrightarrow (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) \cdot (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) \cdot \underline{u}_s = \underline{Y}_3 + \underline{Y}_1 \cdot \underline{u}_e + \underline{Y}_3^2 \cdot \underline{u}_s + \underline{Y}_3 \underline{Y}_4 \cdot \underline{u}_s$$

$$\Leftrightarrow \underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\underline{Y}_1 \cdot \underline{Y}_3}{\underline{Y}_2 \cdot (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) + \underline{Y}_1 \cdot \underline{Y}_3}$$

3) • \underline{Y}_1 est nécessairement une résistance sinon les basses fréquences ne sont pas transmises en sortie du filtre ;

• parmi l'ensemble $\{\underline{Y}_2, \underline{Y}_4\}$ il doit y avoir nécessairement, là-aussi, une résistance car sinon les basses fréquences ne sont pas transmises en sortie ;

• si \underline{Y}_4 est une résistance alors \underline{Y}_3 est un condensateur (car le montage ne comporte que deux résistances). Mais dans ce cas il est alors impossible d'avoir $s(t) \rightarrow e(t)$ en basses fréquences.

Conclusion :

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{R_1}; \quad \underline{Y}_2 = jC_2\omega; \quad \underline{Y}_3 = \frac{1}{R_3}; \quad \underline{Y}_4 = jC_4\omega$$

4) Dans cette dernière question, il faut commencer par remplacer $R_1 = R_3$ par R et en déduire \underline{H} :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{1}{R^2}}{jC_2\omega \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + jC_4\omega \right) + \frac{1}{R^2}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + 2RC_2(j\omega) + R^2C_2C_4(j\omega)^2}$$

Test : on obtient bien la forme normalisée d'un filtre passe-bas du 2^e ordre avec $H_0 = 1$.

Identifions ensuite la fréquence propre f_0 et le facteur de qualité Q :

$$\frac{1}{\omega_0^2} = R^2C_2C_4 \Leftrightarrow f_0^2 = \frac{1}{4\pi^2 R^2C_2C_4}$$

$$\frac{1}{Q\omega_0} = 2RC_2 \Leftrightarrow 4Q^2 = \frac{C_4}{C_2}$$

La résolution de ce système d'équations conduit à :

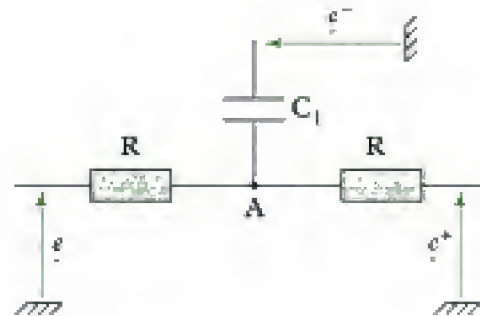
$$C_2 = \frac{1}{4\pi R f_0 Q} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^4 \cdot 9,5 \cdot 10^3 \cdot 1,44} = 0,58 \text{ nF} \quad \text{et} \quad C_4 = 4C_2 \cdot Q^2 = 4,8 \text{ nF}.$$

Exercice 8

1) • **Fonction de transfert \underline{H}_1 (méthode 1)**

On applique le théorème de Millman au point A :

$$\underline{V}_A = \frac{jC_1\omega \cdot \underline{e}^- + \frac{\underline{e}^+}{R} + \frac{\underline{e}}{R}}{jC_1\omega + \frac{2}{R}} \quad \text{avec} \quad \underline{e}^+ = \underline{e}^- = \underline{z}_1 \Rightarrow \underline{V}_A = \frac{\left(jC_1\omega + \frac{1}{R}\right) \cdot \underline{z}_1 + \frac{\underline{e}}{R}}{jC_1\omega + \frac{2}{R}} \quad (1)$$



et en utilisant le diviseur de tension :

$$\underline{e^-} = \underline{s_1} = \frac{\frac{1}{jC_2\omega}}{\frac{1}{jC_2\omega} + R} \cdot \underline{V_A} = \frac{\underline{V_A}}{1 + jR_2C_2\omega} \quad (2)$$

(1) et (2) donnent :

$$(1 + jRC_2\omega) \cdot \underline{s_1} = \frac{\left(jC_1\omega + \frac{1}{R}\right) \cdot \underline{s_1} + \frac{e}{R}}{jC_1\omega + \frac{2}{R}}$$

$$\Leftrightarrow (1 + jRC_2\omega) \cdot \left(jC_1\omega + \frac{2}{R}\right) \cdot \underline{s_1} = \left(jC_1\omega + \frac{1}{R}\right) \cdot \underline{s_1} + \frac{e}{R}$$

d'où on déduit :

$$\underline{H_1} = \frac{\underline{s_1}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + 2RC_2(j\omega) + R^2C_1C_2(j\omega)^2}$$

Il s'agit d'un filtre passe-bas du 2^e ordre.

• Fonction de transfert $\underline{H_2}$



Au lieu de mener un nouveau calcul, il suffit de faire l'analogie avec l'étude qui a donné $\underline{H_1}$:

$$\begin{aligned} R &\rightarrow \frac{1}{jC\omega} \\ \frac{1}{jC_1\omega} &\rightarrow R_1 \\ \frac{1}{jC_2\omega} &\rightarrow R_2 \end{aligned}$$

D'où :

$$\underline{H_2} = \frac{1}{1 + 2\left(\frac{1}{jC\omega}\right) \cdot \frac{1}{R_2} + \frac{1}{(jC\omega)^2} \cdot \frac{1}{R_1R_2}}$$

$$\underline{H_2} = \frac{R_1R_2C^2(j\omega)^2}{1 + 2R_1C(j\omega) + R_1R_2C^2(j\omega)^2}$$

Il s'agit d'un filtre passe-haut du 2^e ordre.

2) • **Le filtre amont** (passe-bas) peut se modéliser par un générateur de tension parfait à sa sortie (revoir paragraphe A. 7. 5. du chapitre précédent). Ainsi :

$$\underline{s_1} = \underline{H_1} \cdot \underline{e} \text{ avec } \underline{s} = \underline{H_2} \cdot \underline{s_1}$$

$$\text{donc } \frac{s}{e} = \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2 = \frac{R_1 R_2 C^2 (j\omega)^2}{[1 + 2R_1 C_2 (j\omega) + R^2 C_1 C_2 (j\omega)^2] \cdot [1 + 2R_1 C (j\omega) + R_1 R_2 C^2 (j\omega)^2]}$$

$$\underline{H} = \frac{R_1 R_2 C^2 (j\omega)^2}{[1 + 2RC_2 (j\omega) + R^2 C_1 C_2 (j\omega)^2] \cdot [1 + 2R_1 C (j\omega) + R_1 R_2 C^2 (j\omega)^2]}$$

• Nature du filtre

\underline{H} représente la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du 2^e ordre de pulsation propre :

$$\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}}$$

tandis que \underline{H}_2 représente la fonction de transfert d'un filtre passe-haut du 2^e ordre de pulsation propre :

$$\omega'_0 = \frac{1}{C\sqrt{R_1 R_2}}$$

Le montage complet est donc un **filtre passe-bande**, de **bande passante limitée** par ω_0 et ω'_0 , et d'**ordre 4**.

3) Les diagrammes de Bode de \underline{H} s'obtiennent aisément à partir de ceux de \underline{H}_1 et \underline{H}_2 car :

$$\underline{H} = \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2 \Rightarrow \begin{cases} G_{dB} = G_{1,dB} + G_{2,dB} \\ \text{Arg}(\underline{H}) = \varphi = \text{Arg}(\underline{H}_1) + \text{Arg}(\underline{H}_2) = \varphi_1 + \varphi_2 \end{cases}$$

On commence donc par représenter les diagrammes asymptotiques de \underline{H}_1 et \underline{H}_2 pour en déduire ceux de \underline{H} .

Calculons également $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ et $f'_0 = \frac{\omega'_0}{2\pi}$:

$$\bullet f_0 = \frac{1}{2\pi R\sqrt{C_1 C_2}} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^4 \cdot \sqrt{7 \cdot 10^{-9} \cdot 3,5 \cdot 10^{-9}}} = 3\,215 \text{ Hz} ;$$

$$\bullet f'_0 = \frac{1}{2\pi C\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{1}{2\pi \cdot 47 \cdot 10^{-9} \sqrt{8 \cdot 10^3 \cdot 16 \cdot 10^3}} = 299 \text{ Hz}.$$

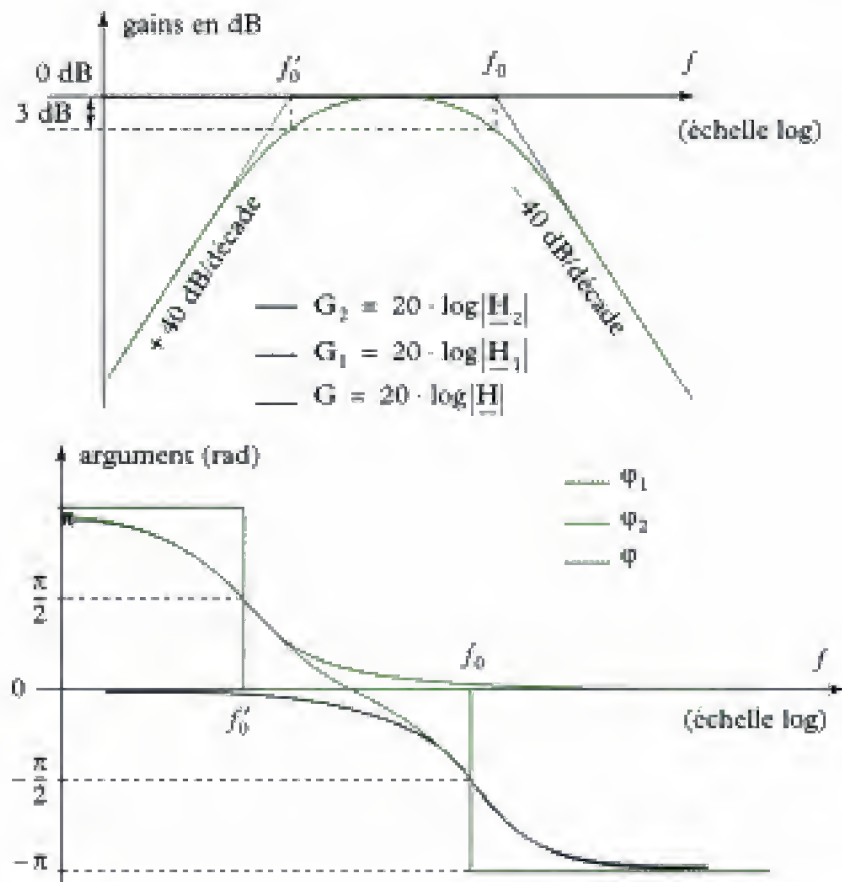
Pour représenter les diagrammes réels, il faut déterminer la valeur numérique du facteur de qualité pour \underline{H}_1 et \underline{H}_2 :

$$\bullet \text{ pour } \underline{H}_1 : \frac{1}{Q\omega_0} = 2RC_2 \Rightarrow Q = \frac{1}{2RC_2\omega_0} = \frac{1}{2\sqrt{C_1}} = \frac{1}{2\sqrt{3,5}} = \frac{\sqrt{2}}{2} ;$$

$$\bullet \text{ pour } \underline{H}_2 : \frac{1}{Q'\omega'_0} = 2R_1 C \Rightarrow Q' = \frac{1}{2R_1 C\omega'_0} = \frac{1}{2\sqrt{R_2}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Les diagrammes réels du gain sont ainsi situés sous le diagramme asymptotique avec un écart de 3 dB à la pulsation de coupure.

Enfin, on remarque que $\frac{f'_0}{f_0} \approx 10$, ce qui permet de tracer avec une bonne approximation les deux diagrammes réels indépendamment, puis de les additionner point par point.

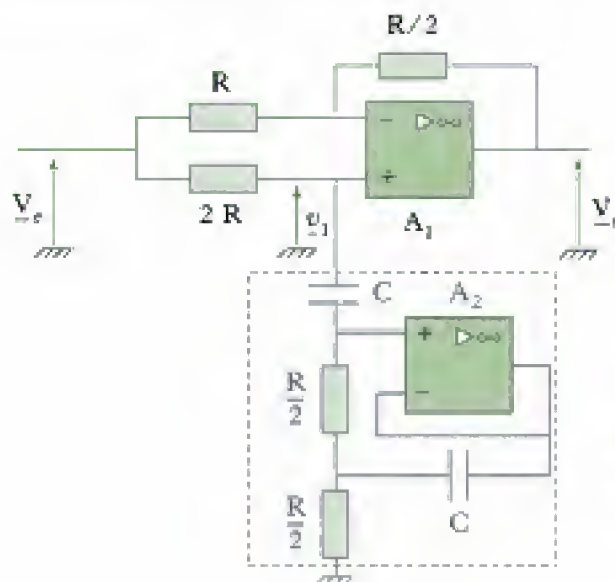


• Commentaires

- L'intervalle $[300 ; 3\,200 \text{ Hz}]$ de la bande passante du filtre englobe la bande passante de l'oreille humaine qui s'étend de quelques Hz à 15-20 kHz. **Il peut être utilisé en réception téléphonique ;**
- **le filtre est assez sélectif en dehors de la bande passante** puisque les bandes atténuées sont de pente $\pm 40 \text{ dB/décade}$;
- un signal appliqué à l'entrée du filtre et dont la fréquence appartient à la bande passante est correctement transmis en amplitude mais il subit dans le même temps un déphasage φ qui dépend de la fréquence, avec φ compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. On parle de **distorsion de phase**.

Exercice 9

1)



on note Z l'impédance de la portion de circuit encadrée en traits pointillés ci-contre.

$$\underline{e}^+ = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + 2R} \cdot V_e = \underline{e}^- \quad (1) \text{ car } A_1 \text{ est idéal :}$$

$$\frac{V_e - \underline{e}^-}{R} = \frac{\underline{e}^- - \underline{V}_s}{\frac{R}{2}} + \underline{i}^- = \frac{\underline{e}^- - \underline{V}_s}{\frac{R}{2}} \Leftrightarrow V_e - \underline{e}^- = 2(\underline{e}^- - \underline{V}_s), \text{ donc : } \underline{V}_e = 3 \underline{e}^- - 2 \underline{V}_s \quad (2), (1) \text{ et } (2)$$

donnent :

$$\underline{V}_e = \frac{3 \underline{Z}}{\underline{Z} + 2R} \cdot V_e - 2 \underline{V}_s \Leftrightarrow \underline{V}_e \cdot \left(1 - \frac{3 \underline{Z}}{\underline{Z} + 2R}\right) = -2 \underline{V}_s.$$

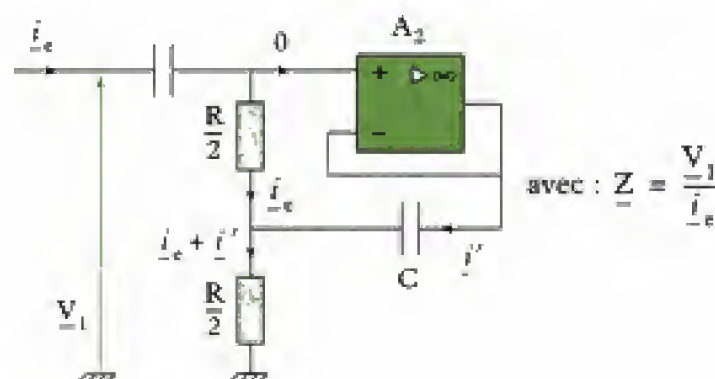
$$\text{Donc } \underline{T} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2R - 2\underline{Z}}{\underline{Z} + 2R},$$

soit :

$$\underline{T} = \frac{\underline{Z} - R}{\underline{Z} + 2R} \quad (3)$$

Commentaire : il peut s'agir un filtre coupe-bande (ou réjecteur) si l'équation $\underline{Z} = R$ admet une solution physiquement acceptable ce que nous vérifierons *a posteriori* après calcul de \underline{Z} .

Déterminons \underline{Z} :



Ici $i_e = jC\omega \cdot (\underline{V}_1 - \underline{e}^+)$, donc :

$$\frac{1}{jC\omega} \cdot \underline{i}' = \frac{R}{2} \cdot \underline{i}_e \Rightarrow \underline{i}' = j \frac{R}{2} C\omega \cdot \underline{i}_e$$

$$\text{donc : } \underline{e}^+ = \frac{R}{2} \cdot \underline{i}_e + \frac{R}{2} \cdot (\underline{i}_e + \underline{i}') = R \cdot \underline{i}_e + j \frac{R^2}{4} C\omega \cdot \underline{i}_e$$

$$\text{puis } \underline{i}_e = jC\omega \cdot \underline{V}_1 - jC\omega R \cdot \left(1 + j \frac{R}{4} C\omega\right) \cdot \underline{i}_e \Leftrightarrow \underline{i}_e \cdot \left[1 + jRC\omega + \frac{1}{4}(jRC\omega)^2\right] = jC\omega \cdot \underline{V}_1,$$

$$\text{soit } \underline{Z} = \frac{\underline{V}_1}{\underline{i}_e} = R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{4} R^2 (jC\omega).$$

En repartant dans (3), il vient :

$$\underline{T} = \frac{\left(R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{4} R^2 jC\omega\right) - R}{\left(R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{4} R^2 jC\omega\right) + 2R}$$

D'où :

$$\underline{T} = \frac{1 - \left(\frac{RC\omega}{2}\right)^2}{1 - \left(\frac{RC\omega}{2}\right)^2 + j3RC\omega}$$

On reconnaît la fonction de transfert d'un filtre coupe-bande dont les paramètres ω_0 , Q (et m) s'obtiennent par identification avec la forme normalisée :

$$\begin{cases} \frac{RC}{2} = \frac{1}{\omega_0} \\ \frac{1}{Q \cdot \omega_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_0 = \frac{2}{RC} \\ Q = \frac{1}{6} = 0,17 \end{cases} \quad (m = 3)$$

2) En posant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, on a :

$$\underline{T} = \frac{1-x^2}{1-x^2+j\frac{x}{Q}} = \frac{1}{1+j\frac{x}{Q \cdot (1-x^2)}} \Rightarrow |\underline{T}| = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{Q^2 \cdot (1-x^2)^2}}}$$

Donc $G(\text{dB}) = 20 \cdot \log|\underline{T}| = -10 \cdot \log\left[1 + \frac{x^2}{Q^2 \cdot (1-x^2)^2}\right]$.

- Si $x \rightarrow +\infty$: ($\log x \rightarrow +\infty$), $G(\text{dB}) \rightarrow 0 \text{ dB}$;
- si $x \rightarrow 0^+$: ($\log x \rightarrow -\infty$), $G(\text{dB}) \rightarrow 0 \text{ dB}$;
- si $x \rightarrow 1$: $G(\text{dB}) \rightarrow -\infty$.

Évaluons également la largeur de la bande coupée qui est l'intervalle des fréquences pour lesquelles

$|\underline{T}| \leq \frac{T_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On résout alors :

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{Q^2 \cdot (1-x^2)^2} &= 1 \Leftrightarrow x^2 - Q^2 \cdot (1-x^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow [x - Q \cdot (1-x^2)] \cdot [x + Q \cdot (1-x^2)] = 0 \\ &\Leftrightarrow x - Q \cdot (1-x^2) = 0 \quad \text{ou} \quad x + Q \cdot (1-x^2) = 0. \end{aligned}$$

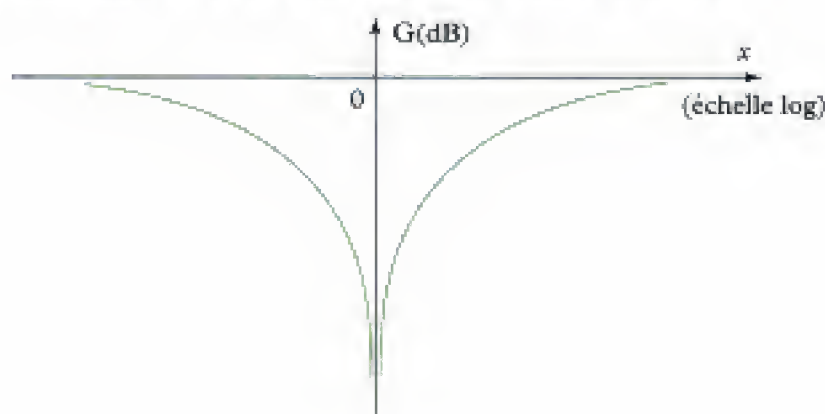
La résolution de ces deux équations du second degré conduit à deux solutions physiquement acceptables c'est-à-dire strictement positives :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1+4Q^2}}{2Q} \\ x_2 = \frac{1 + \sqrt{1+4Q^2}}{2Q} \end{cases} \quad (x_2 > x_1)$$

$\Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = \frac{1}{Q}$ soit $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} = 6$, donc :

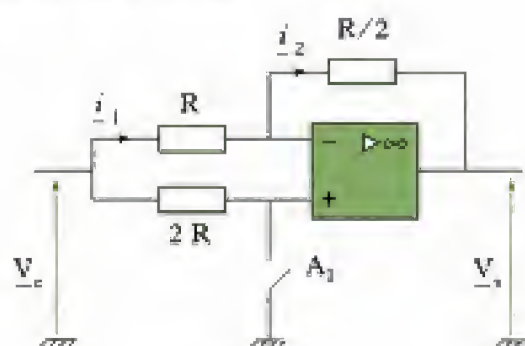
$$\Delta\omega = 6 \omega_0 = \frac{12}{RC}$$

Ce qui conduit au diagramme de Bode dont l'allure est donnée ci-dessous :



3) • En basses fréquences

$\omega \rightarrow 0$ et le schéma équivalent est le suivant :

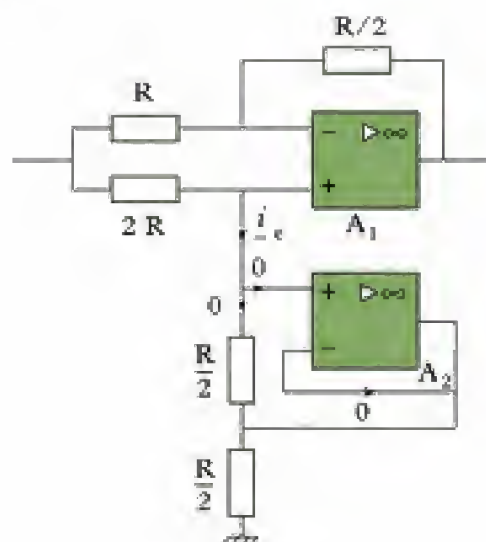


(Z se comporte comme un coupe-circuit)

$$\underline{e}^+ \rightarrow \underline{V}_e \Rightarrow \underline{i}_1 = \underline{i}_2 \rightarrow 0 \Rightarrow \underline{V}_s \rightarrow \underline{V}_e.$$

• En hautes fréquences

$\omega \rightarrow +\infty$ et le schéma devient :



$$\Rightarrow \underline{i}_e = 0$$

$\Rightarrow Z$ se comporte comme un coupe-circuit

$$\Rightarrow \underline{V}_s \rightarrow \underline{V}_e.$$

Effets d'un filtre du premier ou du second ordre

Introduction

Ce chapitre fait suite à l'étude en régime sinusoïdal forcé des filtres linéaires du premier et du second ordre. À partir de cette première approche, nous avons caractérisé l'effet d'un filtre sur un signal sinusoïdal de fréquence quelconque.

Nous allons désormais utiliser cette étude fréquentielle afin de déterminer l'effet d'un filtre du premier ou du second ordre sur des signaux périodiques.

Plan du chapitre 3

A. Rappels sur les filtres	84
1. Filtrage en régime sinusoïdal forcé	84
2. Filtrage d'un signal périodique	84
B. Filtres passe-bas	86
1. Filtre du premier ordre	86
2. Filtre du second ordre	89
3. Conclusion sur le filtrage passe-bas	92
C. Filtres passe-haut	92
1. Filtre du premier ordre	92
2. Conclusion sur le filtrage passe-haut	95
D. Filtre passe-bande	95
1. Filtre du second ordre	95
2. Conclusion sur le filtrage passe-bande	100
Méthodes	
L'essentiel ; mise en œuvre	101
Énoncés des exercices	105
Indications	107
Solution des exercices	108

A. Rappels sur les filtres

1. Dans ce chapitre, nous étudions uniquement le régime forcé et ne tenons pas compte du régime transitoire.

2. Les filtres étudiés sont linéaires. Cette caractéristique ne sera pas toujours mentionnée mais elle est implicite dans cet ouvrage.

Ces rappels vont nous permettre de revoir l'étude du régime forcé¹ en sortie d'un filtre.

A.1. Filtrage en régime sinusoïdal forcé

Un filtre linéaire² à une entrée $e(t)$ et une sortie $s(t)$ est caractérisé par sa fonction de transfert complexe :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

où \underline{e} et \underline{s} sont les représentations complexes des signaux $e(t)$ et $s(t)$.

Nous allons étudier, dans le domaine temporel, la sortie du filtre pour un signal d'entrée sinusoïdal $e(t) = E \cos(\omega_1 t)$. Le signal de sortie est alors de même pulsation que le signal d'entrée :

$$s(t) = S \cos(\omega_1 t + \varphi).$$

Nous pouvons utiliser la fonction de transfert du filtre pour déterminer les valeurs de S et φ :

• L'amplitude du signal de sortie est égale au produit de l'amplitude du signal d'entrée par le module de la fonction de transfert pour la pulsation ω_1 :

$$S = |\underline{H}(j\omega_1)|E.$$

• Le déphasage du signal de sortie par rapport au signal d'entrée est égal à l'argument de la fonction de transfert pour la pulsation ω_1 :

$$\varphi = \text{Arg}(\underline{H}(j\omega_1)).$$

A.2. Filtrage d'un signal périodique

Nous avons vu au premier chapitre qu'un signal périodique de période

$$T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

peut être représenté par sa série de Fourier.

Nous considérons que le signal d'entrée est de la forme :

$$e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)).$$

Le signal d'entrée peut être décrit comme la somme de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples¹ de f_1 .

Soit un filtre linéaire de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$. L'utilisation du théorème de superposition permet d'écrire la sortie de ce filtre comme la somme des réponses du filtre à chaque composante sinusoïdale en entrée :

$$s(t) = H_0 a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} |\underline{H}(jn\omega_1)| a_n \cos(n\omega_1 t + \text{Arg}(\underline{H}(jn\omega_1))) \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} |\underline{H}(jn\omega_1)| b_n \sin(n\omega_1 t + \text{Arg}(\underline{H}(jn\omega_1)))$$

où H_0 est l'amplification statique du filtre.

Pour obtenir le spectre d'amplitude et de phase du signal de sortie, nous utilisons le spectre d'amplitude et de phase du signal d'entrée.

3. Voir le premier chapitre de cet ouvrage.

Propriété 1

À la sortie d'un filtre, en régime forcé, l'amplitude de **chaque harmonique du signal d'entrée** est multipliée par le module de la fonction de transfert calculé à la pulsation de l'harmonique et le déphasage est celui calculé à cette même pulsation.

Remarque :

Il faut éviter l'erreur classique :

$$s(t) = H_0 a_0 + |\underline{H}(j\omega_1)| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega_1 t + \text{Arg}(\underline{H}(j\omega_1))) \\ + |\underline{H}(j\omega_1)| \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega_1 t + \text{Arg}(\underline{H}(j\omega_1)))$$

Application 1 Obtention d'un signal de sortie

Soit le filtre passe-bas de fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j(2 \cdot 10^{-4}\omega)}.$$

1. Tracer l'évolution en fonction de la fréquence de l'amplification et de la phase de $\underline{H}(j\omega)$ en échelle linéaire.
2. Déterminer la série de Fourier du signal de sortie pour un signal d'entrée de série de Fourier :

$$e(t) = \sum_{n=0}^2 \frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi} \cos(10^4(2n+1)t).$$

3. Représenter l'évolution de $s(t)$.

Solution

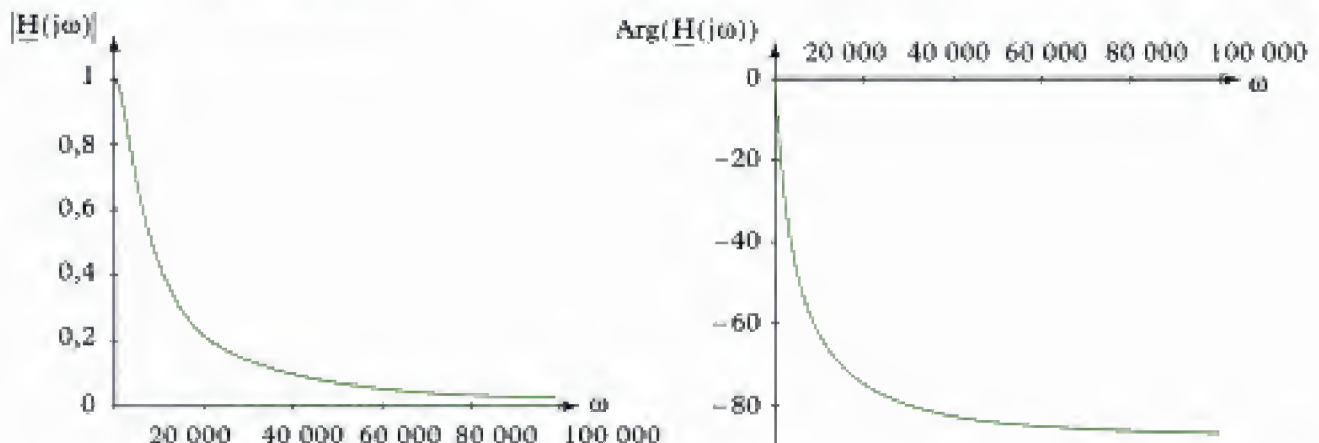
1. Le module de la fonction de transfert est :

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \cdot 10^{-8}\omega^2}}$$

et la phase :

$$\text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = -\text{Arctan}(2 \cdot 10^{-4}\omega).$$

Les courbes sont les suivantes :



2. Les pulsations des harmoniques du signal d'entrée sont :

$$10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, 3 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{ et } 5 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Par lecture sur la courbe ou par calcul, on obtient :

$$|\underline{H}(j10^4)| \approx 0,45 ; \text{Arg}(\underline{H}(j10^4)) \approx -63^\circ \approx -1,1 \text{ rad} ;$$

$$|\underline{H}(j3 \cdot 10^4)| \approx 0,16 ; \text{Arg}(\underline{H}(j3 \cdot 10^4)) \approx -81^\circ \approx -1,4 \text{ rad} ;$$

$$|\underline{H}(j5 \cdot 10^4)| \approx 0,10 ; \text{Arg}(\underline{H}(j5 \cdot 10^4)) \approx -84^\circ \approx -1,5 \text{ rad}.$$

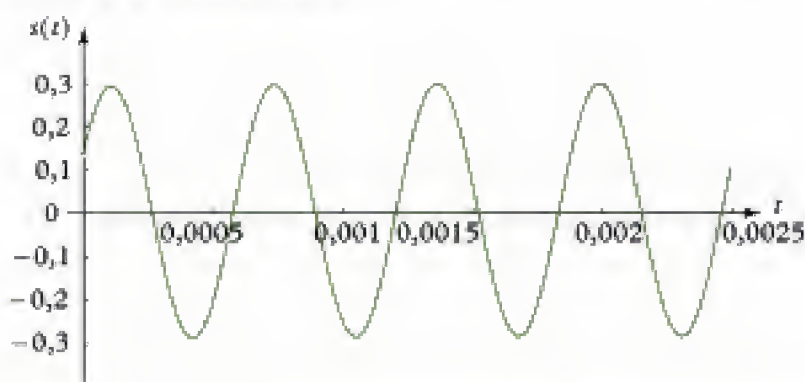
On en déduit :

$$s(t) = \sum_{n=0}^2 |\underline{H}(jn10^4)| \frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi} \cos(10^4(2n+1)t + \text{Arg}(\underline{H}(jn10^4))).$$

D'où :

$$s(t) = 0,29 \cos(10^4 t - 1,1) - 0,03 \cos(3 \cdot 10^4 t - 1,4) + 0,01 \cos(5 \cdot 10^4 t - 1,5)$$

3. Le signal de sortie $s(t)$ a la forme suivante :



Nous allons maintenant étudier l'effet des filtres passe-bas, passe-haut et passe-bande à partir de quelques exemples. Pour cela, nous avons décidé d'utiliser des filtres actifs et des signaux d'entrée de forme carré¹.

1. La forme triangulaire sera vue en exercice.

B. Filtre passe-bas actif

B.1. Filtre du premier ordre

Considérons le montage donné en figure 1 fonctionnant en régime sinusoïdal permanent où l'amplificateur opérationnel est supposé idéal :

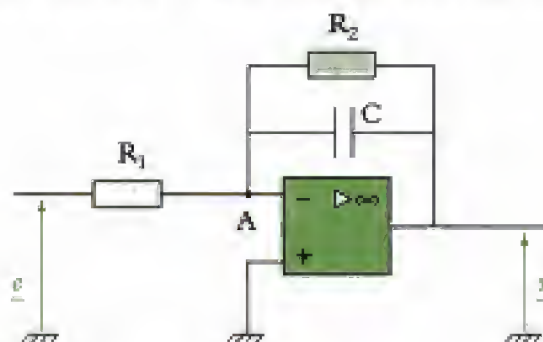


Fig. 1 - Exemple de filtre actif passe-bas du premier ordre.

• Étude en régime sinusoïdal

Commençons par établir l'expression de la fonction de transfert associée à ce montage alimenté en régime sinusoïdal à la pulsation ω . Comme l'amplificateur opérationnel est idéal, $e^- = e^+ = 0$ et en appliquant par exemple le théorème de Millman au point A, il vient :

$$\frac{e}{R_1} + \frac{s}{R_2} + jC\omega s = 0 \text{ puisque } i^- = 0$$

$$\Leftrightarrow s \left(\frac{1}{R_2} + jC\omega \right) = -\frac{e}{R_1}$$

$$\Leftrightarrow H(j\omega) = \frac{s}{e} = -\frac{1}{R_1} \frac{1}{\frac{1}{R_2} + jC\omega}$$

$$= -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + jR_2C\omega}$$

L'identification avec la forme normalisée :

$$H(jx) = \frac{H_0}{1 + jx}, \text{ où } x = \frac{\omega}{\omega_c},$$

conduit à :

$$H_0 = -\frac{R_2}{R_1}, \quad \omega_c = \frac{1}{R_2C}.$$

Nous en déduisons l'allure des diagrammes de Bode associés à la fonction de transfert, tels qu'ils ont été vus en première année, en supposant par exemple $R_2 > R_1$ (fig. 2).

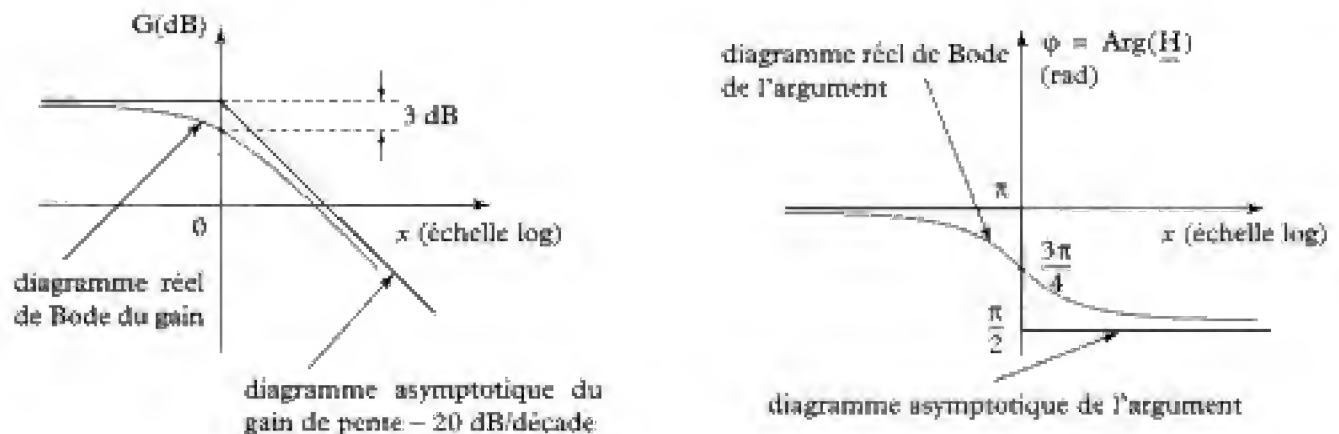


Fig. 2 - Diagrammes de Bode du filtre passe-bas actif du premier ordre si $R_2 > R_1$.

2. Ou signal crête-à-crête.

3. L'amplitude est définie par la suite comme la moitié de la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale du signal.

• Effets du filtre sur un signal périodique carré²

Envisageons à présent le cas d'un signal d'entrée $e(t)$ carré, de période 10 ms, d'amplitude³ 2 V et possédant une composante continue (ou « offset ») égale à 1 V.

La figure 3 donne les chronogrammes des tensions $e(t)$ et $s(t)$ obtenus par simulation en prenant les valeurs de composants suivantes :

$$R_1 = 1 \text{ k}\Omega, R_2 = 3,3 \text{ k}\Omega \text{ et } C = 10 \text{ nF}.$$

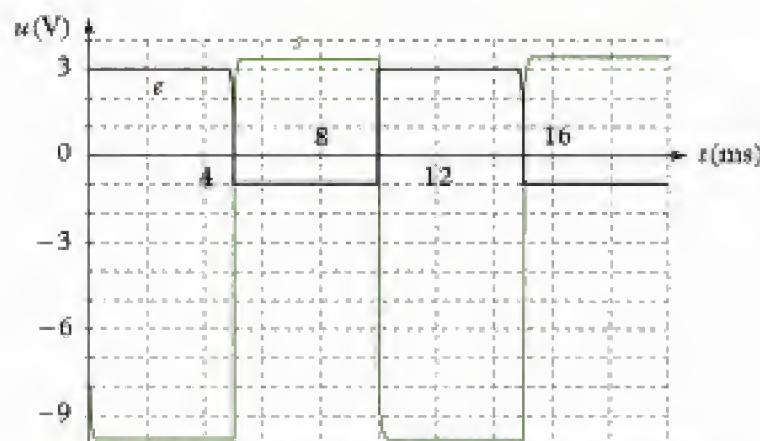


Fig. 3 - Évolutions temporelles des signaux d'entrée et de sortie.

Nous pouvons faire les observations suivantes :

- (1) le signal de sortie est d'ailleurs voisin de celui d'entrée, il est donc peu déformé par le filtre ;
- (2) $s(t)$ n'est jamais discontinu ;
- (3) $s(t)$ est pratiquement en opposition de phase avec $e(t)$;
- (4) $s(t)$ possède une valeur moyenne voisine de $-3,3$ V.

Certaines de ces observations peuvent s'interpréter assez simplement :

- (3) traduit le fait que le montage est de type inverseur comme l'indique le signe moins apparaissant dans l'expression de la fonction de transfert ;
- (4) s'explique en remarquant qu'une composante continue correspond à un signal de période « infinie » donc de fréquence nulle. En multipliant la valeur de la composante continue de $e(t)$ par la valeur de l'amplification :

$$H_0 = -\frac{R_2}{R_1} = -3,3,$$

nous trouvons en effet une valeur moyenne de $s(t)$ égale à $-3,3$ V.

Pour interpréter les autres observations, nous proposons la représentation des spectres d'amplitude¹ des signaux d'entrée et de sortie en figure 4 :

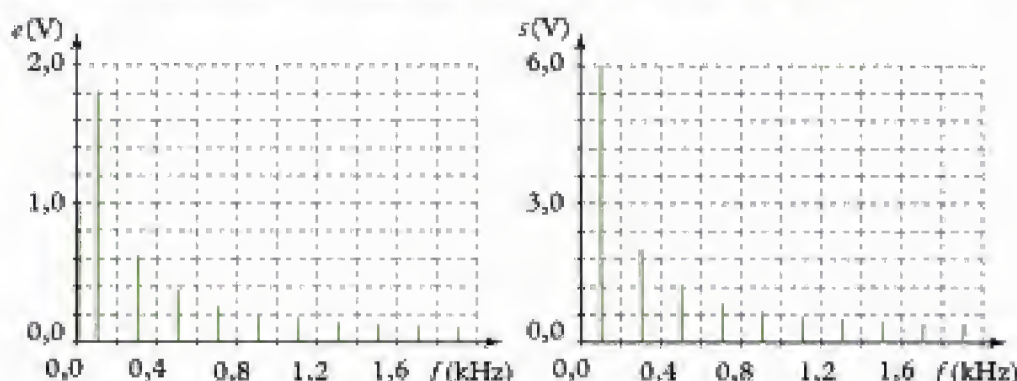


Fig. 4 - Spectres d'amplitude de $e(t)$ et de $s(t)$.

Nous pouvons alors conclure que :

- (1) est corroborée par le fait que le spectre du signal de sortie est semblable à celui du signal d'entrée, à un facteur multiplicatif près. En effet, si nous calculons numériquement la fréquence de coupure f_c du filtre, nous obtenons :

$$f_c = \frac{1}{2\pi R_2 C} = 4,8 \text{ kHz.}$$

1. Les simulations qui sont présentées dans l'ensemble de cet ouvrage font apparaître la valeur efficace des harmoniques visibles dans le spectre du signal étudié et non leur amplitude. Le passage à l'amplitude se fait par simple multiplication de la lecture par le facteur $\sqrt{2}$. Dans un problème, il convient de déterminer s'il en est de même car un tel choix n'est pas systématique !

Tous les harmoniques d'amplitude significative sont situés dans la bande passante du filtre. Il est donc normal que l'allure du signal de sortie soit voisine de celle du signal d'entrée puisque les spectres sont semblables.

• (2) s'interprète en remarquant que l'amplitude des harmoniques *hautes* fréquences est faible devant celle des harmoniques de premier rang. En effet, les harmoniques *hautes* fréquences sont la traduction, dans l'*espace fréquentiel*, de *brusques* changements d'états du signal d'entrée dans le domaine *temporel*.

B.2. Filtre du second ordre

Considérons le montage donné en figure 5 fonctionnant en régime sinusoïdal permanent où l'amplificateur opérationnel est toujours supposé idéal et le montage sans charge en aval :

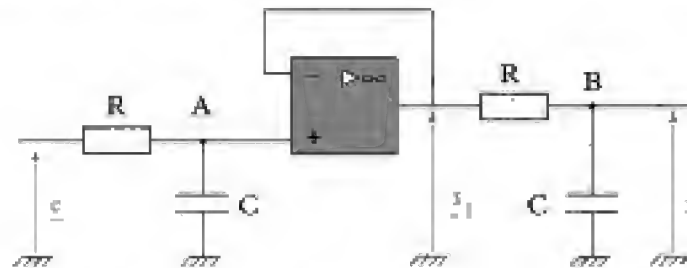


Fig. 5 - Exemple de filtre actif passe-bas du deuxième ordre.

• **Étude en régime sinusoïdal :**

La fonction de transfert peut être établie par exemple à l'aide d'un diviseur de tension appliqué en A :

$$\underline{e}^+ = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{e}, \text{ puisque } \underline{e}^- = 0.$$

Sachant que $\underline{e}^+ = \underline{e}^- = \underline{s}_1$, nous avons donc :

$$\underline{s}_1 = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{e} \quad (1).$$

De même, en utilisant le diviseur de tension appliqué en B, nous avons :

$$\underline{s} = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{s}_1 \quad (2).$$

En reportant l'expression de \underline{s}_1 issue de (1) dans (2), il vient :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \left(\frac{1}{1 + jRC\omega} \right) \left(\frac{1}{1 + jRC\omega} \right) = \left(\frac{1}{1 + jRC\omega} \right)^2 \quad (3).$$

1. ω_0 représente la pulsation propre.

L'identification avec la forme normalisée $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$, où $x = \frac{\omega}{\omega_0}$,

conduit après développement de (3) à :

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}; \frac{1}{Q\omega_0} = 2RC \Rightarrow Q = \frac{1}{2} \text{ (ou } m = 1); H_0 = 1.$$

Nous en déduisons en figure 6 l'allure des diagrammes de Bode obtenus en prenant les valeurs de composants $R = 33 \text{ k}\Omega$ et $C = 47 \text{ nF}$.

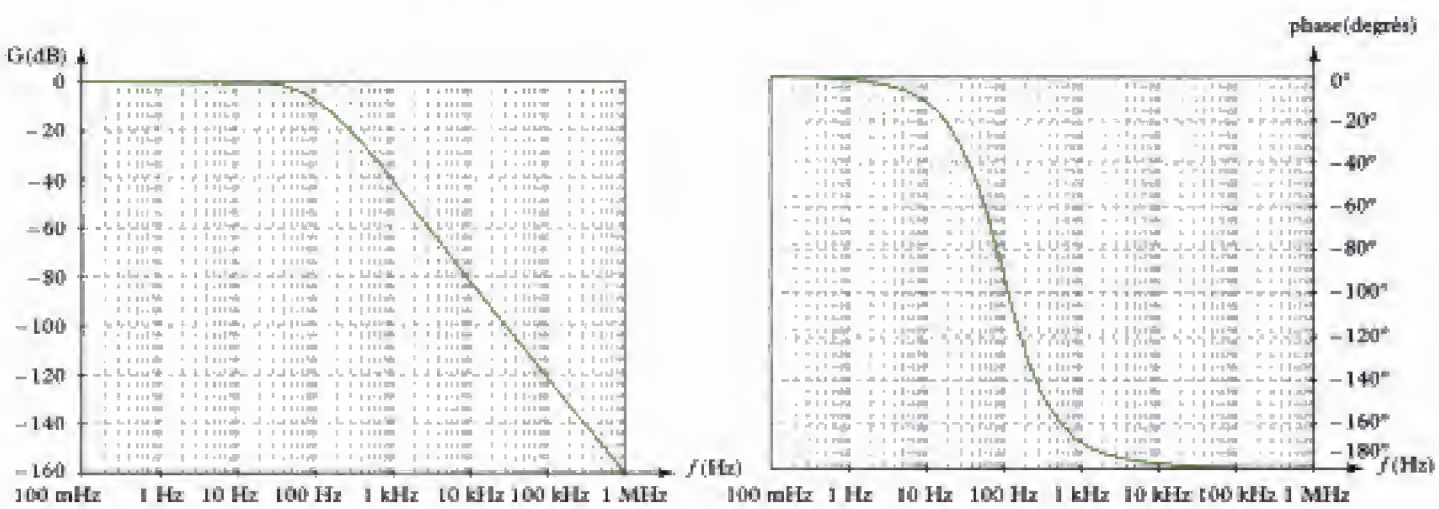


Fig. 6 - Diagrammes de Bode associés au filtre actif passe-bas du deuxième ordre.

• Effets du filtre sur un signal périodique carré

Envisageons à présent le cas d'un signal d'entrée $e(t)$ carré, de période 10 ms, d'amplitude 6 V et possédant une composante continue égale à 1 V. La figure 7 donne les chronogrammes des tensions $e(t)$ et $s(t)$ obtenus par simulation et en prenant les mêmes valeurs de composants :

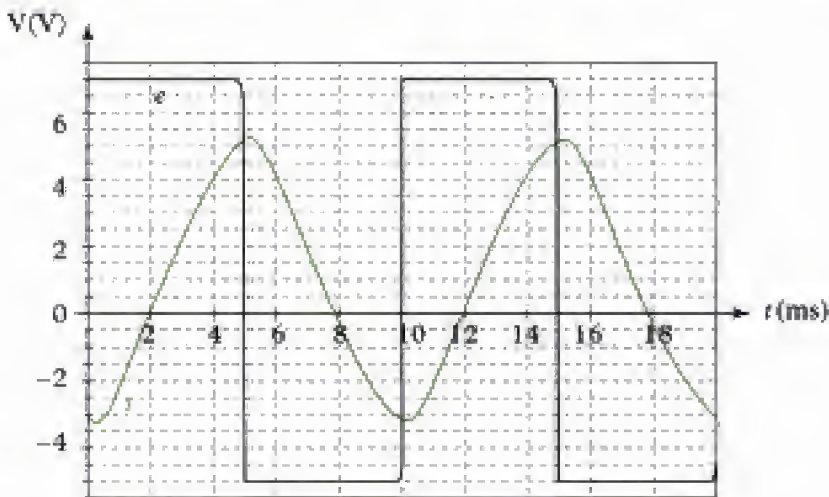


Fig. 7 - Évolutions temporelles des signaux d'entrée et de sortie.

Nous pouvons faire les observations suivantes :

- (1) le signal de sortie, proche du signal sinusoïdal, a donc une allure très différente du signal d'entrée qui est ainsi très déformé par le filtre ;
- (2) $s(t)$ n'est jamais discontinu ;
- (3) l'amplitude de $s(t)$ est inférieure à celle du signal d'entrée, atténuée d'un rapport $\frac{34}{48} = 0,7$ soit environ -3 dB ;
- (4) $s(t)$ et $e(t)$ ont la même valeur moyenne.
- (4) s'interprète facilement à partir de l'expression de la fonction de transfert : vu que $H_0 = 1$, les composantes continues sont donc effectivement identiques en entrée et en sortie du filtre.

Pour interpréter les autres observations, nous proposons les simulations logicielles des spectres d'amplitude des signaux d'entrée et de sortie en **figure 8** :

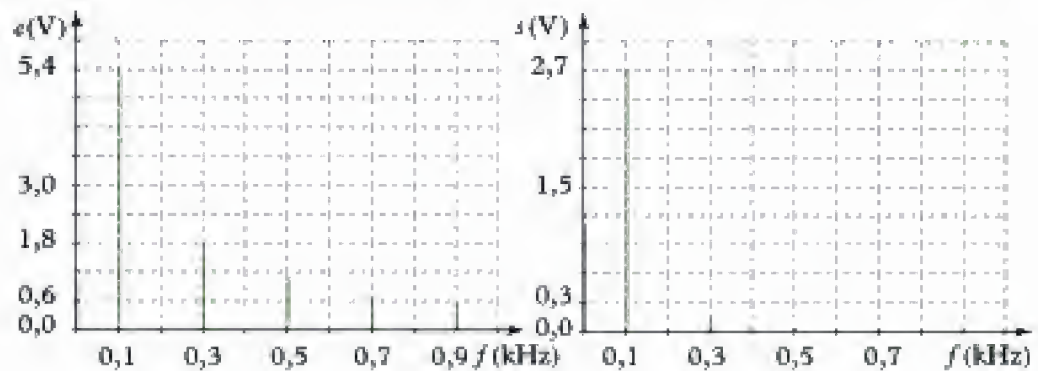


Fig. 8 - Spectres d'amplitudes de $e(t)$ et de $s(t)$.

Calculons numériquement d'autre part, la fréquence de coupure f_0 et la fréquence f du signal d'entrée :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} = 102 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad f = \frac{1}{T} = 100 \text{ Hz.}$$

Nous concluons donc que la fréquence de coupure est très proche de celle du signal d'entrée. Le spectre indique de surcroît que l'amplitude du fondamental est voisine de 0,71 fois celle de $e(t)$: nous retrouvons les 3 dB d'atténuation évoqués en (3).

(1) s'explique par le fait que les harmoniques de rang supérieur à 1 sont fortement atténués puisque situés dans la bande coupée dont la pente vaut 40 dB par décade (filtre du 2^e ordre). La représentation suivante (**fig. 9**) illustre schématiquement l'opération de filtrage :

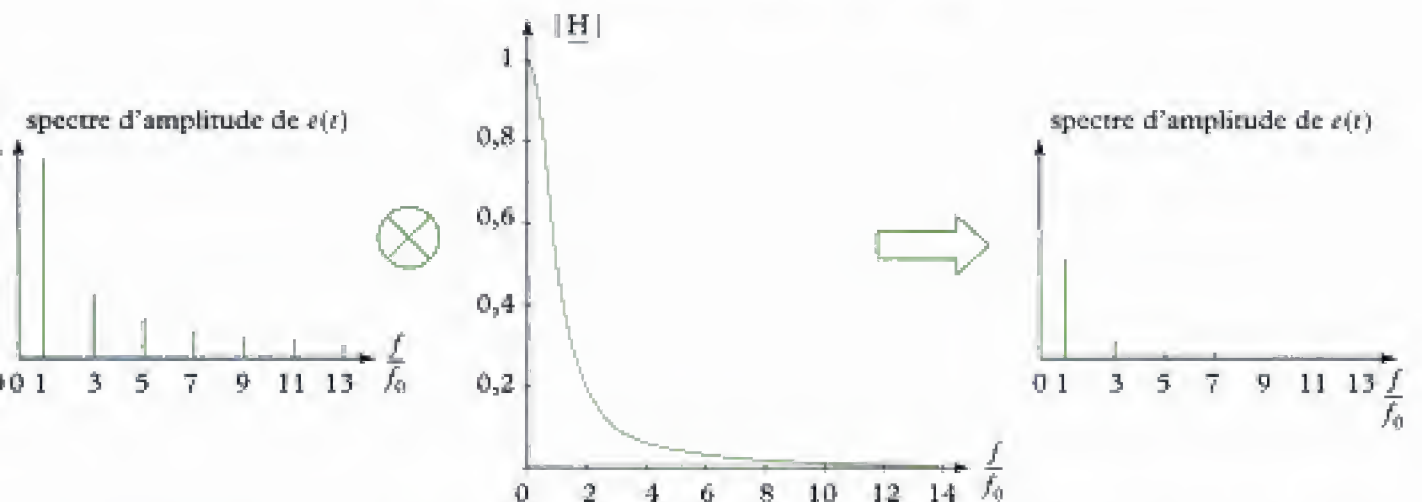


Fig. 9 - Schématisation de l'opération de filtrage sur le spectre d'amplitude du signal d'entrée (le symbole \otimes modélise l'action du filtre sur le spectre de $e(t)$, qui n'est pas une simple multiplication).

Le signal est donc quasi-sinusoïdal et proche¹ du fondamental de $e(t)$;

(2) se justifie de même.

Remarque :

La méthode d'analyse spectrale illustrée en **figure 9** est pratique. Toutefois, il convient de noter que tout comme le spectre d'amplitude, elle fait abstraction du retard de phase introduit par le filtre sur les harmoniques du signal d'entrée.

¹. La distorsion vient des harmoniques de rang supérieur qui bien qu'atténués déforment le signal de sortie qui n'est donc pas tout à fait sinusoïdal.

Application 2 Décalage temporel

Interpréter le décalage temporel observé en figure 7 entre le fondamental du signal d'entrée et de sortie.

Solution

$e(t)$ et $s(t)$ ne sont pas de même nature, aussi pour raisonner en terme de déphasage, il faut effectivement raisonner sur le fondamental du signal d'entrée. Nous constatons alors que ce dernier est en avance sur le fondamental de $s(t)$ d'un angle voisin de 45° . L'explication est immédiate à partir du diagramme de Bode de l'argument qui montre que pour $f = f_0 = 100$ Hz, le signal de sortie est en retard de 45° sur un signal d'entrée sinusoïdal.

B.3. Conclusion sur le filtrage passe-bas

Résumons l'étude menée sur le filtrage passe-bas.

Effets d'un filtre passe-bas sur un signal appliqué à son entrée :

- la composante continue est transmise de l'entrée vers la sortie du filtre ;
- si le signal d'entrée est périodique² et de fréquence très inférieure à la fréquence de coupure, le signal est transmis avec peu de déformation ;
- si la fréquence de ce même signal se rapproche ou dépasse la fréquence de coupure, le signal est déformé³.

2. Nous aurions pu aussi choisir un signal d'entrée triangulaire par exemple.

3. Si la fréquence de $e(t)$ est très élevée devant f_0 , le signal de sortie se réduit alors à la valeur moyenne de $e(t)$ soit à une tension continue si elle existe.

C. Filtre passe-haut

C.1. Filtre du premier ordre

Considérons le montage donné en figure 10 fonctionnant en régime sinusoïdal permanent où l'amplificateur opérationnel est supposé idéal :

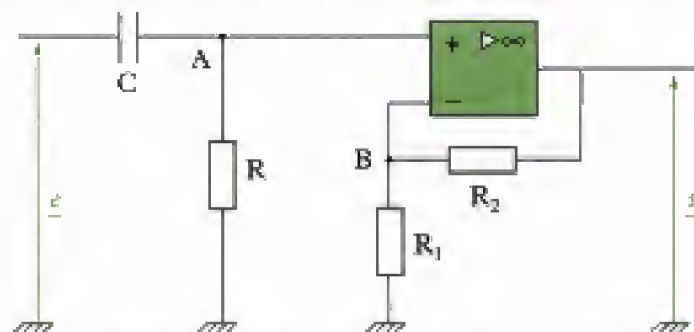


Fig. 10 - Exemple de filtre actif passe-haut du premier ordre.

• Étude en régime sinusoïdal

Établissons l'expression de la fonction de transfert associée à ce montage alimenté en régime sinusoïdal à la pulsation ω . D'après le diviseur de tension :

$$\text{— en A : } \underline{e^+} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{e} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \underline{e} \quad (1) ;$$

$$\text{— en B : } \underline{e^-} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \underline{s} \quad (2).$$

La combinaison de (1) et (2) conduit ainsi à :

$$\underline{H} = \frac{s}{e} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \left(\frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}\right) \quad (3).$$

L'identification avec la forme normalisée $\underline{H} = \frac{jH_0x}{1+jx}$, où $x = \frac{\omega}{\omega_c}$, conduit immédiatement à :

$$\omega_c = \frac{1}{RC}; \quad H_0 = 1 + \frac{R_2}{R_1}.$$

Nous en déduisons l'allure des diagrammes de Bode obtenus en figure 11 par simulations, en prenant les valeurs de composants $R = 4,7 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$, $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ et $R_2 = 3,3 \text{ k}\Omega$.

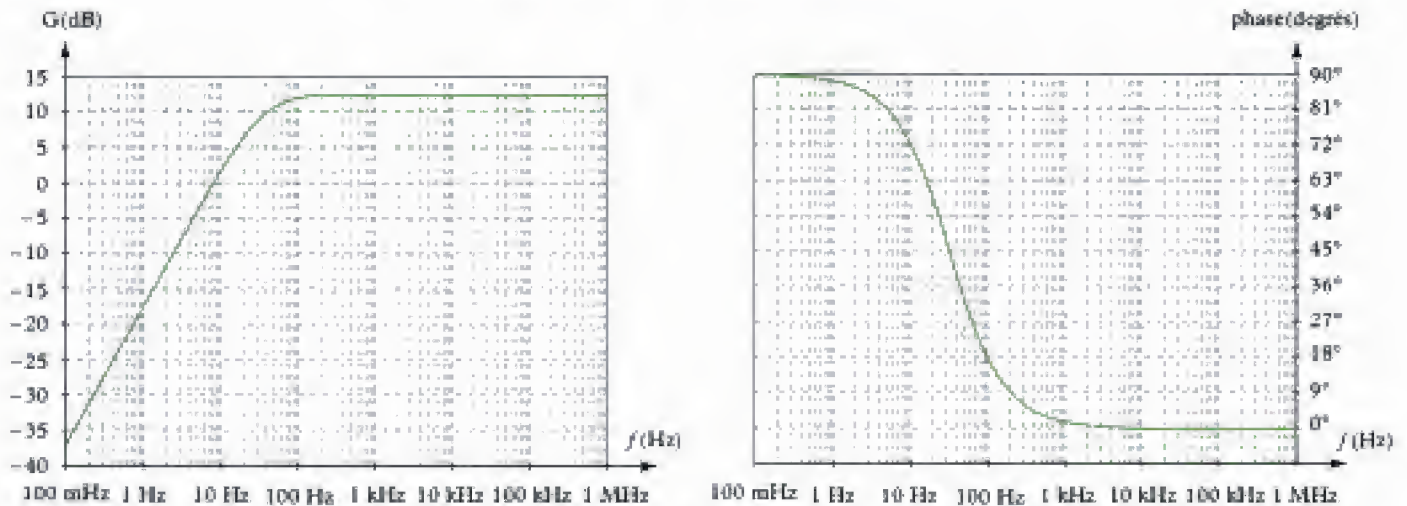


Fig. 11 - Diagrammes de Bode associés au filtre actif passe-haut du premier ordre.

• Effets du filtre sur un signal périodique carré

1. Le diagramme de Bode du gain montre que l'éventuelle composante continue du signal d'entrée n'est pas transmise en sortie du filtre. Pour cette raison, nous avons choisi un signal d'entrée à valeur moyenne nulle.

Envisageons à présent le cas d'un signal d'entrée $e(t)$ carré, de période 1 ms, d'amplitude 0,5 V et sans composante continue¹. La figure 12 donne les chronogrammes des tensions $e(t)$ et $s(t)$ obtenus par simulation en prenant les mêmes valeurs de composants :

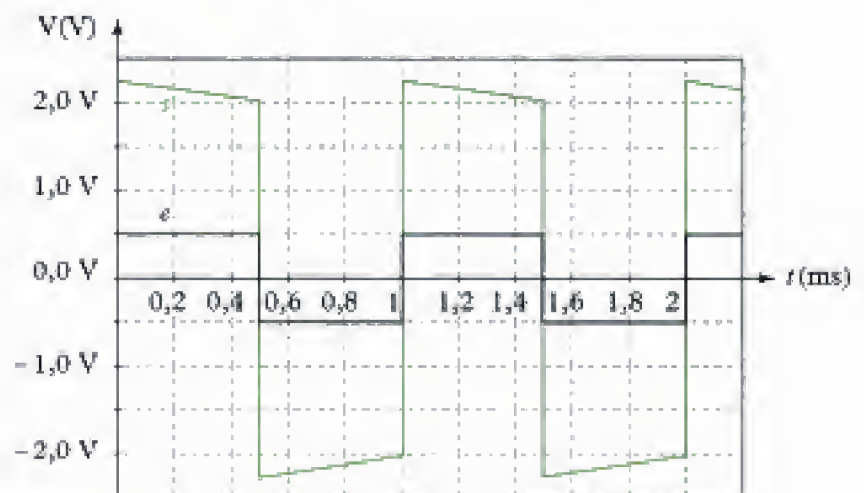


Fig. 12 - Évolutions temporelles des signaux d'entrée et de sortie.

Nous pouvons faire les observations suivantes :

- (1) le signal de sortie est peu déformé par le filtre ;
- (2) $s(t)$ présente des discontinuités lorsqu'il change de signe ;
- (3) l'amplitude de $s(t)$ est voisine de 2,2 V soit environ 4,4 fois celle du signal d'entrée.
- (4) le signal de sortie est en phase avec le signal d'entrée.

Hidden page

C.2. Conclusion sur le filtrage passe-haut

1. Conformément au programme, nous excluons de notre bilan les signaux produits par des circuits non linéaires et dont l'analyse spectrale est plus délicate.

2. Voir correction de l'application 4 question a).

3. Si le signal est sinusoïdal, il est atténué de 3 dB pour un filtre du premier ordre et de 6 dB pour un second ordre.

Effets d'un filtre passe-haut sur un signal¹ appliqué à son entrée :

- la composante continue n'est pas transmise de l'entrée vers la sortie du filtre ;
- si le signal d'entrée est périodique et de fréquence très inférieure à la fréquence de coupure, le signal de sortie est d'amplitude très faible et seules les éventuelles discontinuités du signal d'entrée donnent lieu à une amplitude du signal de sortie significative² ;
- si le signal d'entrée est non sinusoïdal et de fréquence proche de la fréquence de coupure, le signal est très déformé³.

Remarque : En pratique, l'A.O. réel se comporte comme un filtre passe-bas de fréquence de coupure élevée. De ce fait, en hautes fréquences, les filtres actifs passe-haut peuvent avoir un comportement passe-bande.

D. Filtre passe-bande

D.1. Filtre du second ordre

D.1.1 - Étude en régime sinusoïdal

Considérons le montage donné en [figure 14](#) fonctionnant en régime sinusoïdal permanent où l'amplificateur opérationnel est supposé idéal :

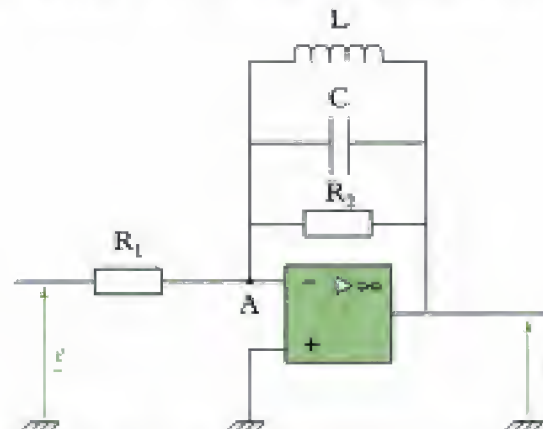


Fig. 14 - Exemple de filtre actif passe-bande du deuxième ordre.

Établissons l'expression de la fonction de transfert associée à ce filtre alimenté en régime sinusoïdal à la pulsation ω . Appliquons le théorème de Millman en A sachant que $\underline{e}^+ = \underline{e}^- = 0$:

$$\frac{\underline{e}}{R_1} + \frac{\underline{s}}{jL\omega} + \frac{\underline{s}}{R_2} + jC\omega\underline{s} = 0 \Leftrightarrow \underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + jR_2\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}$$

L'identification avec la forme normalisée $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$, où $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, conduit au système d'équations :

$$\begin{cases} R_2 C = \frac{Q}{\omega_0} \\ \frac{R_2}{L} = Q\omega_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = R_2 \sqrt{\frac{C}{L}} \end{cases}$$

Nous en déduisons l'allure des diagrammes de Bode représentés en figure 15 en prenant les valeurs de composants :

$$L = 22 \text{ mH}, C = 1 \mu\text{F}, R_1 = 1 \text{ k}\Omega \text{ et } R_2 = 1,5 \text{ k}\Omega.$$

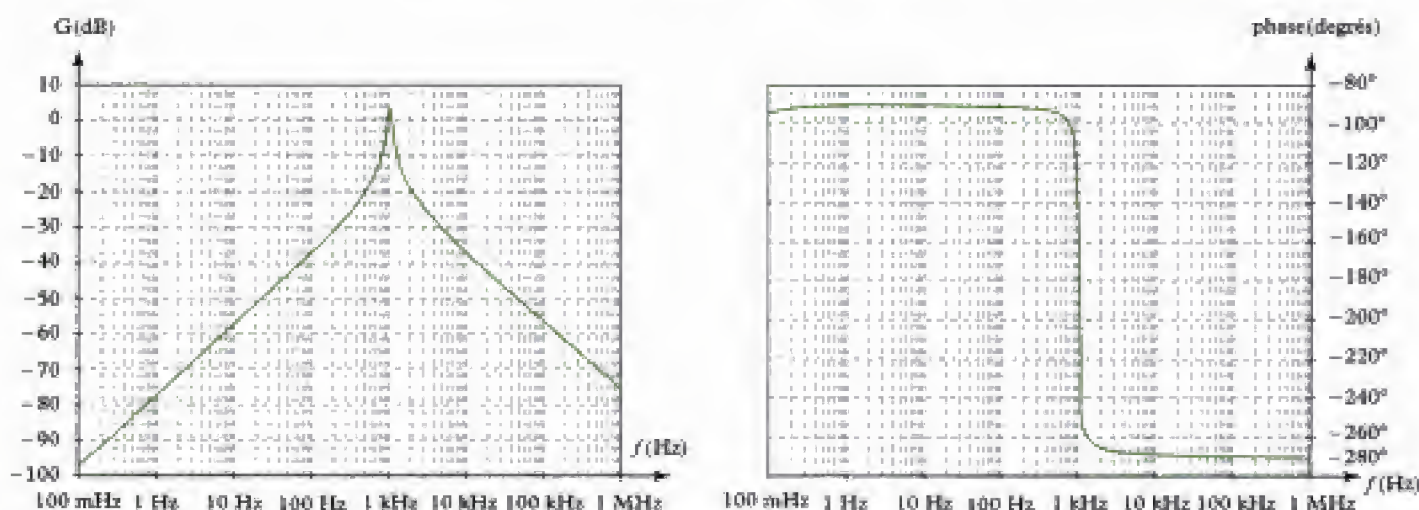


Fig. 15 - Diagrammes de Bode associés au filtre actif passe-bande du deuxième ordre.

1. Cette valeur est obtenue par lecture sur le diagramme : on cherche l'intervalle de fréquence pour lequel le gain est supérieur ou égal au gain maximum -3 dB .

Notons dès à présent que le filtre est ici sélectif puisque sa bande passante est étroite (environ 100 Hz^1 pour $f_0 = 1 \text{ kHz}$). Pour confirmer cette observation, calculons numériquement le coefficient de qualité :

$$Q = R_2 \sqrt{\frac{C}{L}} = 1,5 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{10^{-6}}{22 \cdot 10^{-3}}} \approx 10,1.$$

Cette valeur est effectivement élevée devant l'unité (rapport de 10). Déterminons également la fréquence propre de ce filtre :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1,07 \text{ kHz}.$$

D.1.2 - Effets du filtre sur un signal périodique carré de fréquence 50 Hz

Envisageons à présent le cas d'un signal d'entrée $e(t)$ carré, d'amplitude 5 V avec une composante continue positive égale à 2 V. Les valeurs des composants étant conservées, nous donnons en figure 16 les chronogrammes des tensions $e(t)$ et $s(t)$ et les spectres d'amplitudes en figure 17 :

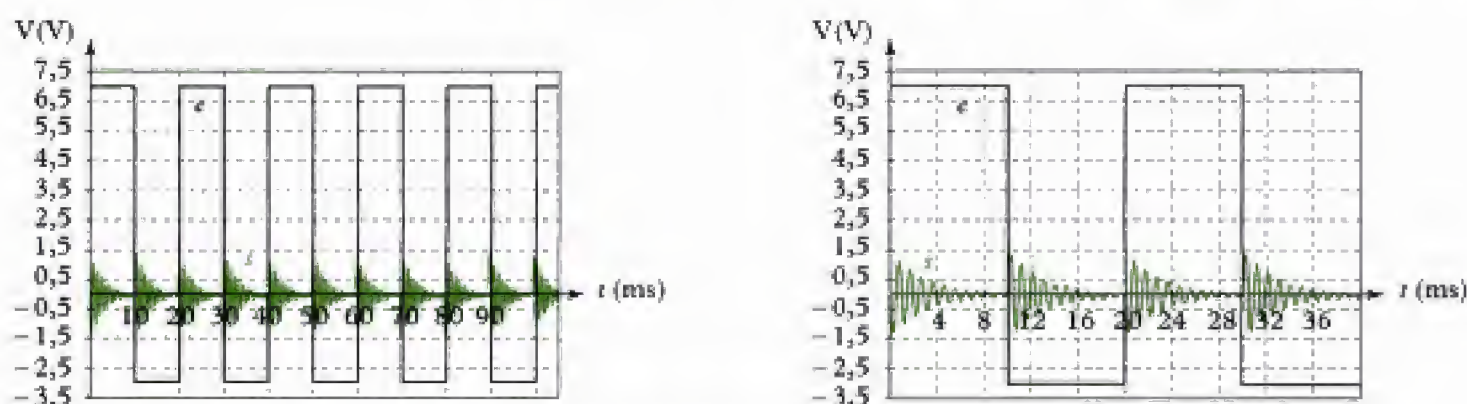


Fig. 16 - Évolutions temporelles des signaux d'entrée et de sortie.

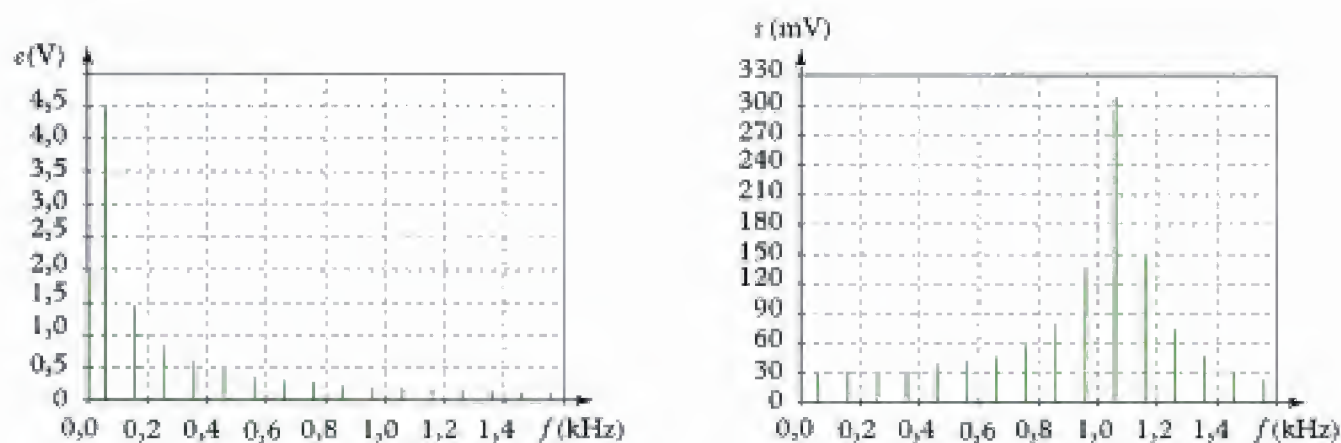


Fig. 17 - Spectres d'amplitude de $e(t)$ et de $s(t)$.

Nous pouvons faire les observations suivantes :

Le signal de sortie présente des oscillations amorties avec une pseudo-période voisine de 1 ms ; dans le spectre d'amplitude de ce signal, seule l'harmonique de fréquence proche de f_0 est significative et il n'y a pas de composante continue.

Interprétations :

Le signal $s(t)$ n'est pas transmis correctement par le filtre. En effet, seuls les harmoniques de $e(t)$ contenus dans la bande passante sont transmis en sortie du filtre. La valeur de la pseudo-période¹ est à rapprocher de la valeur de la fréquence f_0 qui est égale à 1,07 kHz. La composante continue du signal d'entrée est dans la bande coupée donc non transmise.

Nous pouvons étudier l'effet du filtre sur le signal d'entrée sur la figure 18 :

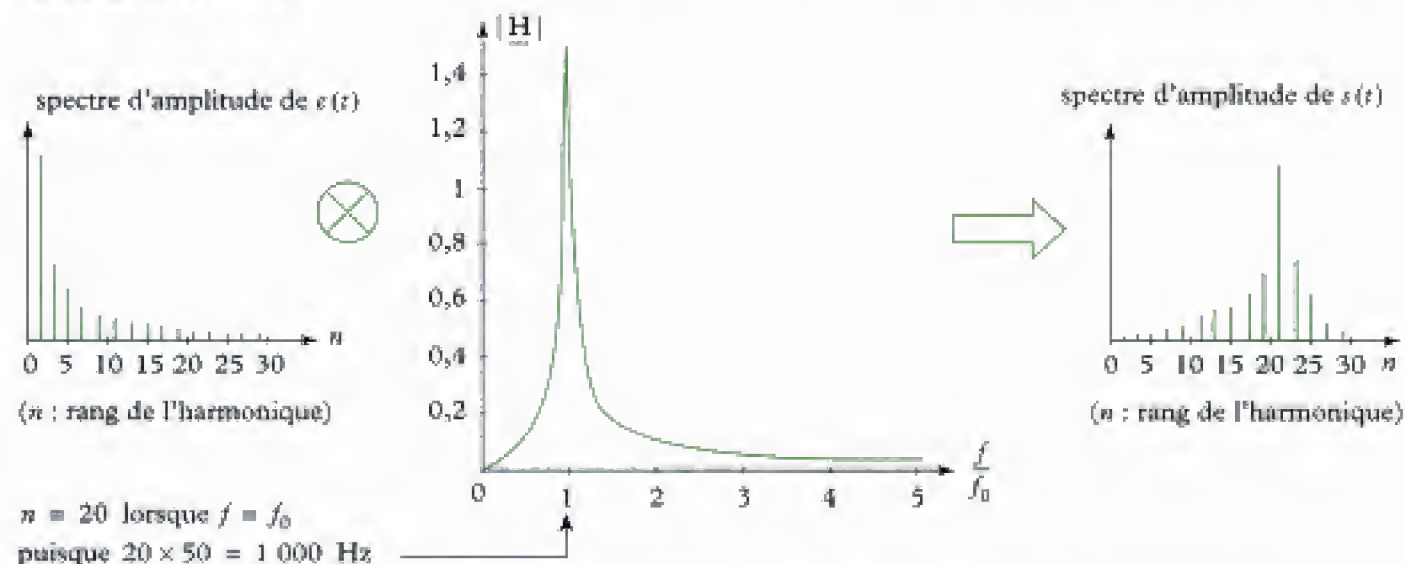


Fig. 18 - Schématisation de l'opération de filtrage sur le spectre d'amplitude du signal d'entrée.

Nous observons à nouveau que les harmoniques de rang voisin de 20 ne sont pas d'amplitude négligeable pour le signal de sortie. Ceci explique les oscillations données sur le signal de sortie.

D.1.3 - Effets du filtre sur un signal périodique carré de fréquence 1 kHz

Seule la fréquence de $e(t)$ a été modifiée par rapport au cas précédent. Les nouveaux chronogrammes des tensions $e(t)$ et $s(t)$ sont donnés en figure 19, les spectres d'amplitude en figure 20 :

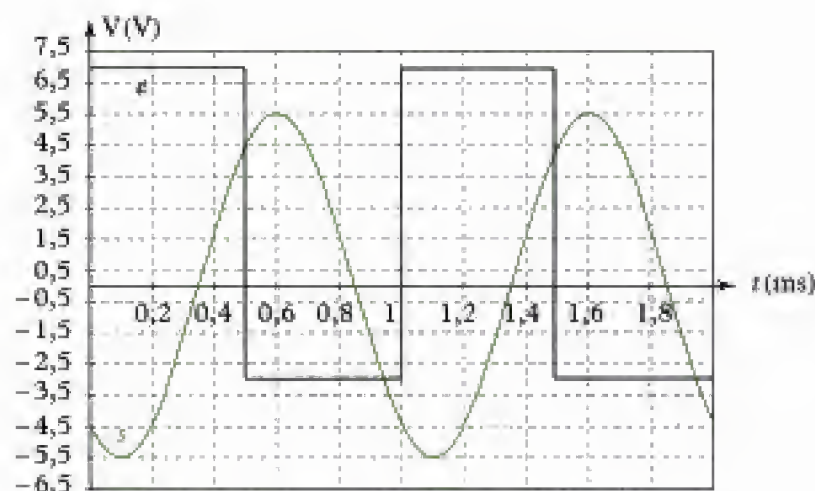


Fig. 19 - Évolutions temporelles des signaux d'entrée et de sortie.

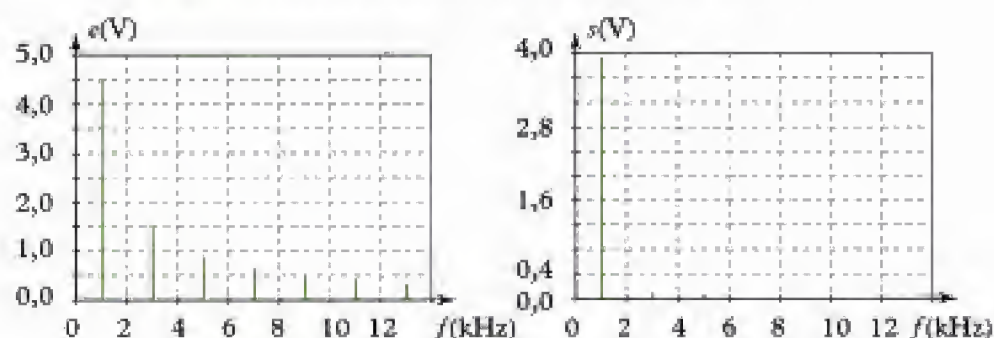


Fig. 20 - Spectres d'amplitude de $e(t)$ et de $s(t)$.

Nous pouvons faire les observations suivantes :

Pour une fréquence égale à 1 kHz et donc proche de f_0 , le signal est quasi-sinusoidal, de fréquence voisine de f_0 , sans composante continue.

D.1.4 - Effets du filtre sur un signal périodique carré de fréquence 10 kHz

Seule la fréquence de $e(t)$ a été à nouveau modifiée. Les nouveaux chronogrammes des tensions $e(t)$ et $s(t)$ sont donnés en figure 21, les spectres d'amplitude en figure 22 :

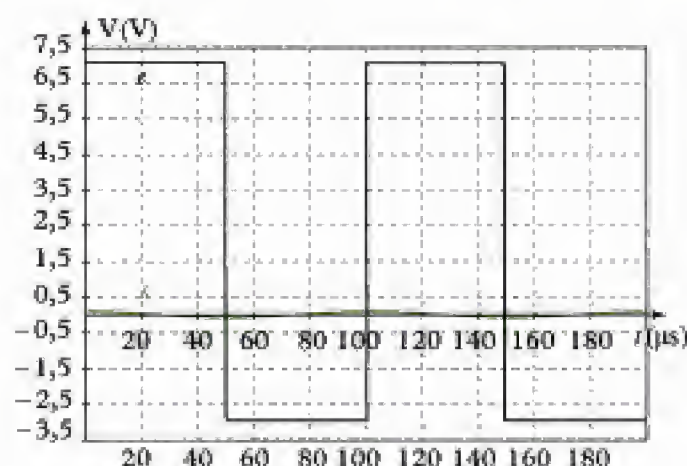


Fig. 21a - Évolution temporelle du signal d'entrée.

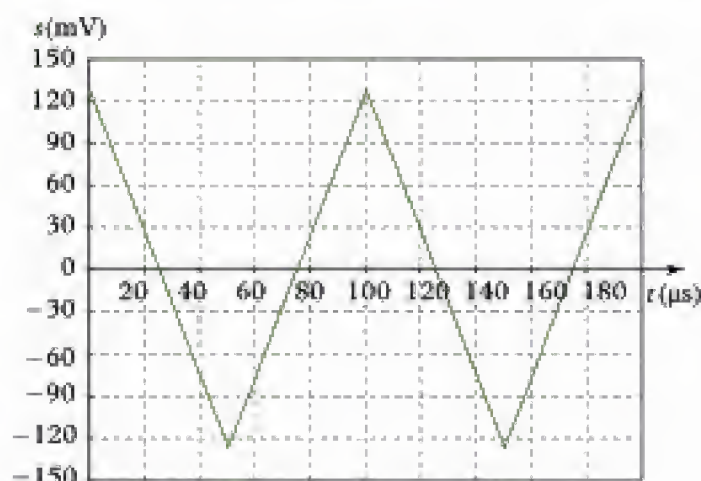


Fig. 21b - Évolution temporelle du signal de sortie.

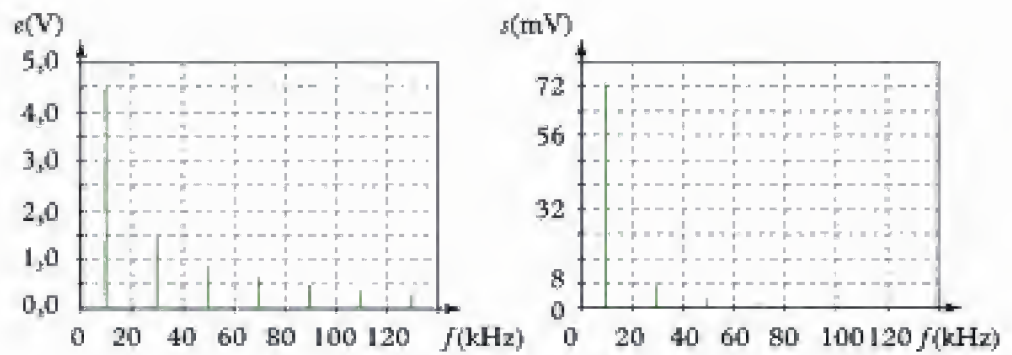


Fig. 22 - Spectres d'amplitude de $e(t)$ et de $s(t)$.

Nous pouvons faire les observations suivantes :

En hautes fréquences, le signal de sortie est d'amplitude très faible et sans composante continue. Il est en outre d'allure triangulaire¹.

Interprétations :

Le fondamental de $e(t)$, l'harmonique le plus proche de f_0 , est situé dans la bande coupée des hautes fréquences ($f \gg f_0$), aussi tous les harmoniques du signal d'entrée sont fortement atténués. Le signal de sortie est donc très atténué.

Remarque : ces conclusions se retrouvent simplement à partir de la figure 18 en sachant qu'ici $n = 1$ correspond au rapport $\frac{f}{f_0} = 10$.

Application 4 Réponse d'un filtre passe-bande

Anticiper l'allure de la réponse d'un filtre passe-bande réalisé par le même montage mais dont les valeurs de composants conduisent à un coefficient de qualité voisin de 0,1 pour un signal d'entrée carré : dont l'ensemble des harmoniques significatifs

- a) est situé dans la bande coupée du filtre en basses fréquences ;
- b) sont de fréquence voisine de la fréquence propre du filtre ;
- c) est situé dans la bande coupée du filtre en hautes fréquences.

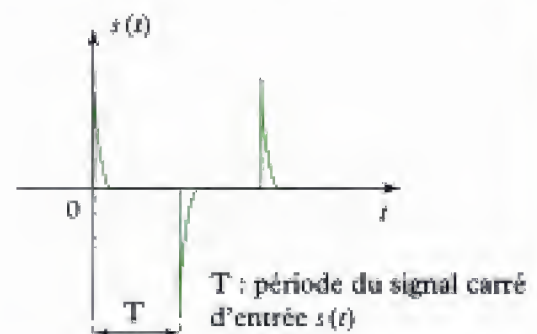
Solution

La différence par rapport au cas étudié précédemment se situe dans la valeur de Q : ici le filtre est peu sélectif (car $Q \ll 1$).

a) Les premiers harmoniques de $e(t)$ n'étant pas situés dans la bande passante, ils sont atténués (figure 18) tandis que les harmoniques de rang voisin de 20 sont mieux transmis. La bande passante étant plus large qu'au paragraphe D.1.2, la réponse temporelle n'est plus pseudo-périodique car le filtre ne favorise pas une seule composante du spectre de $e(t)$. L'étude spectrale peut ensuite être complétée par celle du régime transitoire qui est apériodique et très amorti. Ce qui conduit à l'allure ci-contre pour le signal en sortie du filtre.

b) Le signal de sortie n'est pas sinusoïdal comme dans le cas $Q \approx 10$ et contient plusieurs harmoniques. Plus la bande passante sera large et plus le signal de sortie se rapprochera d'un signal d'allure carrée, toujours sans composante continue.

c) Ici il n'y a aucune différence à noter par rapport au cas du filtre de facteur de qualité voisin de 10.



D.2. Conclusion sur le filtrage passe-bande

L'étude menée dans ce paragraphe peut se résumer comme suit :

1. Conformément au programme, nous excluons de notre bilan les signaux produits par des circuits non linéaires et dont l'analyse spectrale est plus délicate.

2. Revoir la question b) de l'application 4.

3. Ce cas est identique à celui du filtre passe-bas.

Effets d'un filtre passe-bande sur un signal¹ appliqué à son entrée :

- la composante continue n'est pas transmise de l'entrée vers la sortie du filtre ;
- si le signal d'entrée est périodique, non sinusoïdal et de fréquence très inférieure à la fréquence de coupure, la réponse temporelle dépend de la valeur du facteur de qualité. En bande étroite, il ne transmet que les harmoniques de fréquence proche de la fréquence propre du filtre. En bande large, seules les éventuelles discontinuités du signal d'entrée donnent lieu à un signal en sortie ;
- si la fréquence de ce signal se rapproche de la fréquence propre du filtre, le signal transmis peut avoir des formes très différentes là encore selon la largeur de bande. En bande étroite, le signal de sortie est presque sinusoïdal, sinon il est voisin de la composante alternative² du signal d'entrée ;
- si la fréquence de ce signal est très supérieure à la fréquence propre du filtre, le signal de sortie est de faible amplitude.³

L'essentiel

✓ Effet d'un filtre sur un signal périodique

* Un signal d'entrée périodique de période $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ s'écrit sous forme de sa série de Fourier :

$$e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)).$$

* Le signal de sortie du filtre linéaire de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ s'écrit sous forme de la somme des réponses du filtre à chaque composante sinusoïdale en entrée :

$$s(t) = H_0 a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} |\underline{H}(jn\omega_1)| (a_n \cos(n\omega_1 t + \text{Arg}(\underline{H}(jn\omega_1))) + b_n \sin(n\omega_1 t + \text{Arg}(\underline{H}(jn\omega_1))))$$

où H_0 est l'amplification statique du filtre.

✓ Effets du filtrage passe-bas sur la composition spectrale d'un signal périodique :

- La composante continue est transmise de l'entrée vers la sortie du filtre.
- Si le signal d'entrée est périodique et de fréquence très inférieure à la fréquence de coupure, le signal est transmis avec peu de déformation.
- Si la fréquence d'un signal non sinusoïdal se rapproche ou dépasse la fréquence de coupure, le signal est déformé.

✓ Effets du filtrage passe-haut sur la composition spectrale d'un signal périodique :

- La composante continue n'est pas transmise de l'entrée vers la sortie du filtre.
- Si le signal d'entrée est périodique et de fréquence très inférieure à la fréquence de coupure, le signal de sortie est d'amplitude très faible et seules les éventuelles discontinuités du signal d'entrée donnent lieu à une amplitude du signal de sortie significative.
- Si la fréquence du signal est proche de la fréquence de coupure, le signal est très déformé s'il est non sinusoïdal et atténué s'il est sinusoïdal.

✓ Effets du filtrage passe-bande sur la composition spectrale d'un signal périodique :

- La composante continue n'est pas transmise de l'entrée vers la sortie du filtre.
- Si le signal d'entrée est périodique, non sinusoïdal et de fréquence très inférieure à la fréquence de coupure, la réponse temporelle dépend de la valeur du facteur de qualité. En bande étroite, il ne transmet que les harmoniques de fréquence proche de la fréquence propre du filtre. En bande large, seules les éventuelles discontinuités du signal d'entrée donnent lieu à un signal en sortie.
- Si la fréquence de ce signal se rapproche de la fréquence propre du filtre, le signal transmis peut avoir des formes très différentes là encore selon la largeur de bande. En bande étroite, le signal de sortie est presque sinusoïdal, sinon il est voisin de la composante alternative du signal d'entrée.
- Si la fréquence de ce signal est très supérieure à la fréquence propre du filtre, le signal de sortie est de faible amplitude.

Mise en œuvre

Méthode n° 1

Comment utiliser la représentation d'un signal périodique à l'entrée d'un filtre dans l'espace des fréquences ?

On souhaite analyser le signal de sortie d'un circuit de filtrage en raisonnant sur la représentation spectrale du signal d'entrée et sur la fonction de transfert du filtre. On peut aussi parfois prédire la forme du signal de sortie.

→ Savoir faire

- Il faut commencer par faire l'étude du système également dans l'espace des fréquences. Pour un filtre, on détermine donc sa fonction de transfert ce qui permet dans un premier temps de l'identifier.

Puis on trace les diagrammes de Bode. En pratique, le diagramme de Bode asymptotique du gain peut suffire. On trace le diagramme réel du gain si des résultats quantitatifs sont attendus.

- On superpose le spectre du signal d'entrée périodique au diagramme de Bode du gain. Soit ce spectre est fourni dans l'énoncé, soit il est introduit grâce à la donnée de la décomposition en série de Fourier du signal d'entrée. Seuls les harmoniques situés dans la bande passante du filtre contribuent à l'élaboration du signal de sortie. Identifier si le spectre donne les amplitudes ou les valeurs efficaces des harmoniques.



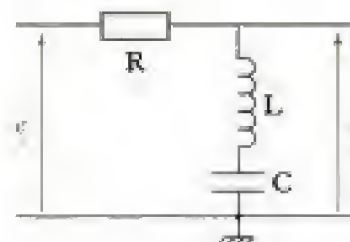
Dans cet ouvrage, on donne les valeurs efficaces des harmoniques.

- On interprète ou on prévoit l'action du filtre sur le signal d'entrée. Les harmoniques situés dans la bande passante se retrouvent dans le spectre du signal de sortie et permettent de justifier l'allure de ce signal dans l'espace des temps.

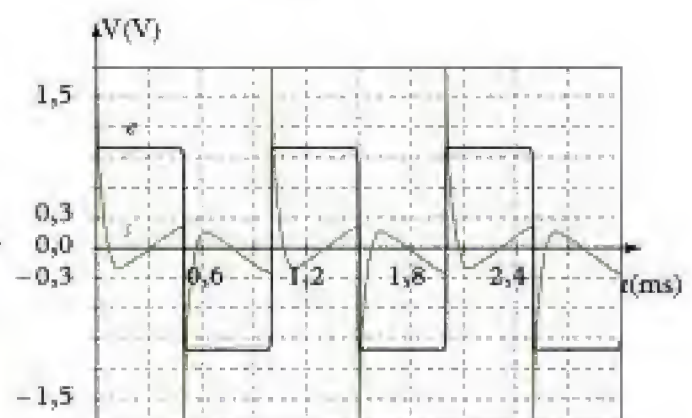
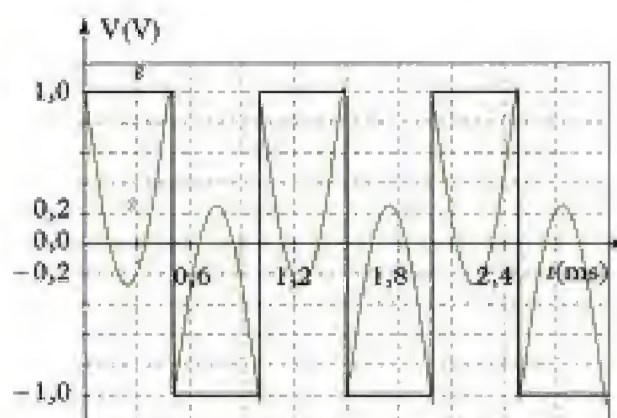
→ Application

On considère le filtre ci-contre :

On donne ci-après les réponses temporelles $s(t)$ obtenues pour R_1 et R_2 , le signal d'entrée $e(t)$ étant carré, d'amplitude 1 V, impair, de valeur moyenne nulle et de fréquence $f = 1$ kHz :

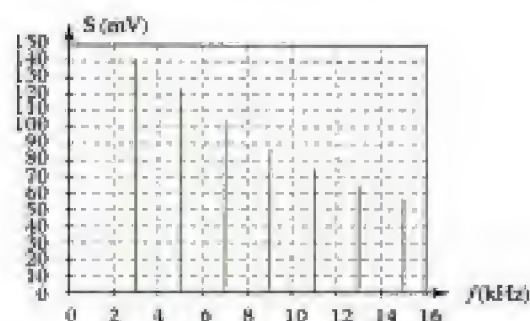
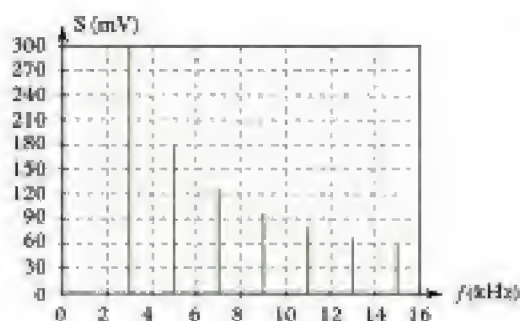


$$\begin{aligned} R &= R_1 = 3 \, \Omega \\ \text{ou } R &= R_2 = 160 \, \Omega \\ L &= 5 \, \text{mH} \\ C &= 5 \, \mu\text{F} \end{aligned}$$



Hidden page

Pour compléter cette interprétation, nous donnons ci-dessous les spectres des signaux de sortie pour les deux valeurs de R qui précisent les conclusions précédentes :



Nous vérifions en particulier que :

- pour $R = R_1$, les amplitudes des harmoniques du signal de sortie de rang supérieur à 1 sont égales à celles des harmoniques de même rang du signal d'entrée ;
- pour $R = R_2$ les premiers harmoniques, de rang supérieur à 1, sont plus atténués que dans le cas où $R = R_1$.

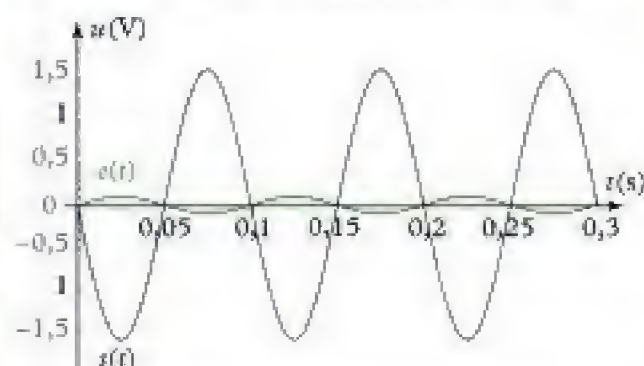
Exercices

Niveau 1

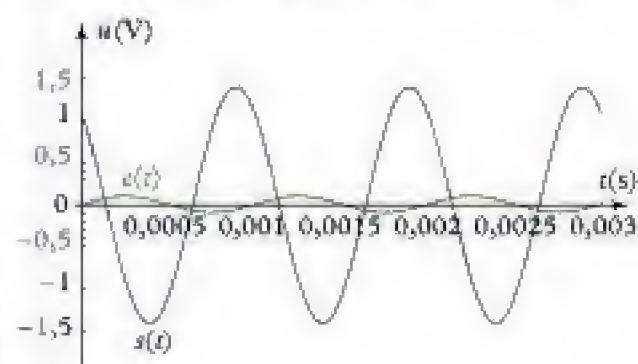
Ex. 1

Déterminer le type de filtre donnant les réponses suivantes lorsque l'entrée est un signal sinusoïdal de fréquence f_1 variable et d'amplitude 0,1 V.

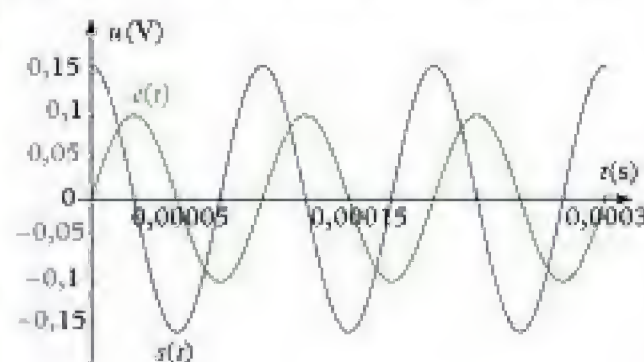
• Tensions d'entrée et de sortie pour $f_1 = 10$ Hz



• Tensions d'entrée et de sortie pour $f_1 = 1$ kHz



• Tensions d'entrée et de sortie pour $f_1 = 10$ kHz



Ex. 2

On considère le filtre passe-bas de fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jx\sqrt{2} - x^2},$$

où $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ avec $\omega_0 = 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

1) Montrer que la phase $\varphi(\omega)$ de la fonction de transfert peut s'écrire $\varphi(\omega) = \pi - k\omega$ où k est une constante à déterminer pour des pulsations ω telles que $\omega \ll \omega_0$.

2) Le signal d'entrée est un signal créneau représenté par sa série de Fourier :

$$e(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi} \cos((2n+1)\omega_1 t),$$

où $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ avec T_1 la période du signal d'entrée.

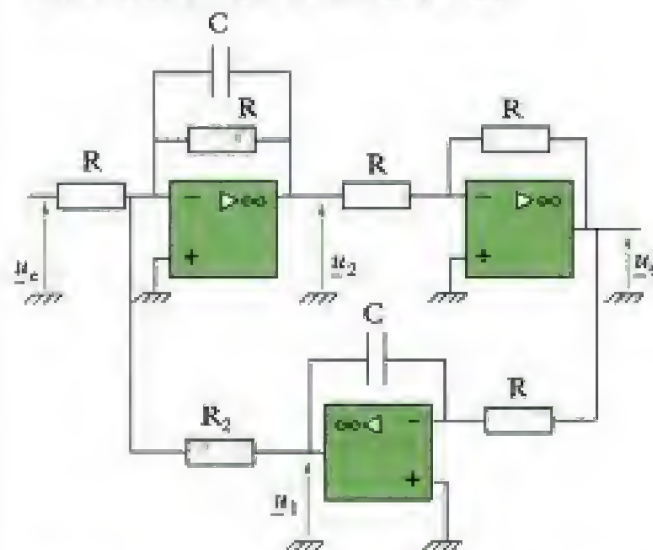
On considère que les signaux peuvent être assimilés à leurs six premiers harmoniques nuls.

Montrer que les seuls effets du filtrage consistent en l'inversion du signal et en l'introduction du retard τ entre l'entrée et la sortie pour $\omega_1 = 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Niveau 2

Ex. 3 Effet d'un filtre actif sur une tension carrée

Soit le montage où les A.O. sont parfaits :



1) Déterminer la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{u_s}{u_e}$ du système et la mettre sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

À quel type de filtre correspond-elle ? Quel est son rôle ? Comment obtenir ce filtre à partir de composants passifs et d'un montage simple ? Quel est l'avantage du montage à A.O. ?

Hidden page

On précisera les expressions de H_0 et f_c en faisant apparaître une condition nécessaire portant sur les valeurs des composants du montage.

2) Tracer les diagrammes de Bode (on prendra $R_1 = 2R_2$).

3) Discuter sur la pertinence du choix d'un filtre actif pour réaliser ce transfert à la vue du diagramme du gain en basses fréquences. Que peut-on penser du choix d'un filtre passif « équivalent » en hautes fréquences ?

4) On suppose maintenant H_0 constant et quelconque. Identifier le rôle de ce montage vis-à-vis des deux fréquences de coupure du diagramme de Bode.

Est-ce avantageux en pratique ?

5) On souhaite que ce filtre présente un gain statique de signe positif.

Comment réaliser une telle condition simplement ? Peut-on émettre des réserves quant à cette mise en œuvre ?

Indications

Ex. 1 Comparer les courbes deux à deux dans le sens des fréquences croissantes.

Ex. 5 4) Identifier la zone spectrale concernée pour le filtre.

Ex. 6 1) Si la constante de temps est faible devant la demi-période alors la charge du condensateur est complète au cours de cet intervalle de temps.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

• L'étude de la sortie pour $f_1 = 10$ Hz et $f_1 = 1$ kHz montre que l'amplitude du signal a peu varié sur cet intervalle de fréquence.

On en conclut que le filtre ne coupe pas les basses fréquences.

Il s'agit donc d'un **filtre passe-bas** premier ou second ordre ou d'un filtre coupe-bande du second ordre.

• Le signal de sortie pour $f_1 = 10$ kHz a une amplitude proche du deuxième de celle à 1 kHz.

Cela signifie que le gain du filtre a été diminué de 20 dB.

Or l'intervalle correspond à une décade.

Donc le gain a varié de 20 dB/décade.

On peut en conclure qu'il s'agit certainement d'un **filtre passe-bas du premier ordre**.

Ceci se vérifie car la phase est égale à $\frac{\pi}{2}$ pour $f_1 = 10$ kHz (les deux signaux sont en quadrature de phase).

• De plus, pour $f_1 = 10$ Hz, les signaux sont en opposition de phase.

On peut en déduire que l'amplification est négative et obtenir sa valeur par le rapport des amplitudes en entrée et en sortie.

Le gain statique est : $H_0 = -16$.

Exercice 2

1) Par définition, $\varphi(\omega) = \text{Arg}(\underline{H}) = \pi - \text{Arctan}\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$ car le numérateur est négatif.

Dans le cas où $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$, on a $1-x^2 \approx 1$ et $\text{Arctan}(x\sqrt{2}) \approx x\sqrt{2}$.

On obtient donc :

$$\varphi(\omega) = \pi - \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} \omega$$

On en déduit :

$$k = \frac{\sqrt{2}}{\omega_0}$$

2) Le signal de sortie associé à $e(t)$ est :

$$s(t) = \frac{H_0}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi} |H(j(2n+1)\omega_1)| \cos((2n+1)\omega_1 t + \varphi((2n+1)\omega_1)) \right]$$

où $H_0 = -1$ est l'amplification statique.

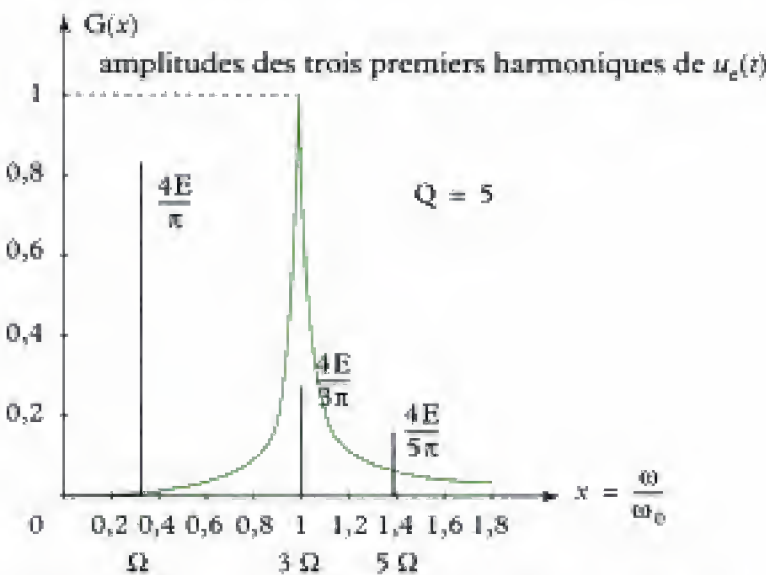
Or pour $n > 4$, on considère que les harmoniques influent peu sur le signal et on a :

$$s(t) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^4 \left[\frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi} |H(j(2n+1)\omega_1)| \cos((2n+1)\omega_1 t + \varphi((2n+1)\omega_1)) \right].$$

Hidden page

Hidden page

Cette étude est ainsi résumée sur le graphique suivant (qui correspond à la représentation donnée dans le cours :



3) Amplitudes et fréquences des harmoniques considérés en sortie

- Harmonique 1 (fondamental) :

Puisque $\omega_0 = 3 \Omega$, la fréquence du fondamental correspond à la pulsation $\Omega = \frac{\omega_0}{3}$ soit une fréquence :

$$F_1 = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{\omega_0}{6\pi}$$

Remarque : le système étudié étant linéaire, le signal de sortie a la même fréquence que le signal d'entrée s'il est sinusoïdal.

L'amplitude de l'harmonique 1 est obtenue grâce à la série de Fourier du signal d'entrée et à l'expression de G pour $\omega = \Omega$:

$$U_{1max} = \frac{4E}{\pi} \times G(\Omega) = \frac{4E}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\Omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\Omega} \right)^2}} \text{ avec } \Omega = \frac{\omega_0}{3}.$$

Donc $U_{1max} = \frac{\frac{4E}{\pi}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{1}{3} - 3 \right)^2}}$ soit :

$$U_{1max} = \frac{\frac{4E}{\pi}}{\sqrt{1 + \frac{64}{9} Q^2}}$$

On procède de même pour les deux harmoniques suivants, ce qui conduit à :

- harmonique 3 :

$$F_3 = \frac{\omega_0}{2\pi} \text{ et } U_{3max} = \frac{4E}{3\pi}$$

- harmonique 5 :

$$F_5 = 5 \cdot F_1 = \frac{5\omega_0}{6\pi} \text{ et } U_{5max} = \frac{\frac{4E}{5\pi}}{\sqrt{1 + \frac{576}{25} Q^2}}.$$

Hidden page

$$\Rightarrow Q = \frac{R + R_1}{2RR_1C} \cdot \frac{1}{\omega_0} = \frac{R + R_1}{2RR_1C} \times C \sqrt{\frac{RR_1R_2}{R + R_1}}$$

$$Q = \sqrt{\frac{R_2(R + R_1)}{2RR_1}}$$

$$\frac{H_0}{\omega_0} = -\frac{R}{R + R_1} \cdot R_2C.$$

$$\Rightarrow H_0 = -\frac{RR_2C}{R + R_1} \times \frac{1}{C} \sqrt{\frac{R + R_1}{RR_1R_2}}$$

$$H_0 = -\sqrt{\frac{RR_2}{R_1(R + R_1)}}$$

$$\text{avec } \underline{H}(j\omega) = H_0 \cdot \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{1}{Q\omega_0} \cdot (j\omega) + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}.$$

Application numérique : pour $100 \, \Omega \leq R \leq 10 \, \text{k}\Omega$

• **Calcul de f_0** (f_0 est une fonction décroissante de R)

$$\text{Si } R = 10 \, \text{k}\Omega : f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot 10^{-8}} \sqrt{\frac{10^5 + 10^4}{10^4 \cdot 10^5 \cdot 10^6}} = 167 \, \text{Hz}.$$

$$\text{Si } R = 100 \, \Omega : f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot 10^{-8}} \sqrt{\frac{10^5 + 100}{100 \cdot 10^5 \cdot 10^6}} = 1\,592 \, \text{Hz}.$$

• **Calcul de Q (et de m)**

$$\text{Si } R = 10 \, \text{k}\Omega : Q = \sqrt{\frac{10^6 \cdot (10^4 + 10^5)}{2 \cdot 10^4 \cdot 10^5}} = 7,42 \left(m = \frac{1}{2Q} = 0,674 \right).$$

$$\text{Si } R = 100 \, \Omega : Q = \sqrt{\frac{10^6 \cdot (100 + 10^5)}{2 \cdot 100 \cdot 10^5}} = 70,7 \left(m = 0,707 \right).$$

• **Calcul de H_0**

$$\text{Si } R = 10 \, \text{k}\Omega : H_0 = -\sqrt{\frac{10^4 \cdot 10^6}{10^5 \cdot (10^4 + 10^5)}} = -0,95.$$

$$\text{Si } R = 100 \, \Omega : H_0 = -\sqrt{\frac{100 \cdot 10^6}{10^5 \cdot (100 + 10^5)}} = -0,01.$$

• **Commentaire des résultats obtenus**

Calculons la largeur de la bande passante Δf avec :

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{1}{2\pi C} \cdot \sqrt{\frac{R + R_1}{RR_1R_2}} \cdot \sqrt{\frac{2RR_1}{R_2(R + R_1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi R_2C}.$$

On constate que la **bande passante ne dépend pas de la valeur de R** ce qui est une commodité très intéressante pour un filtre passe-bande dont la fréquence centrale est quant à elle ajustable grâce à R .

Application numérique : $\Delta f = 22,5 \, \text{Hz}$.

De surcroît, la **largeur de la bande passante est limitée** même si, à basses fréquences (f voisine de $f_{0\min} = 167 \, \text{Hz}$), la sélectivité n'est pas très bonne...

Hidden page

Remarque : Le signe négatif de l'amplitude de $s_1(t)$ peut s'interpréter en disant que $s_1(t)$ est en opposition de phase avec $e_1(t)$.

• **Pour l'harmonique 3 ($k = 1$)**

en entrée : $e_3(t) = \frac{4E_m}{3\pi} \cdot \sin(1\,200 \cdot \pi \cdot t)$

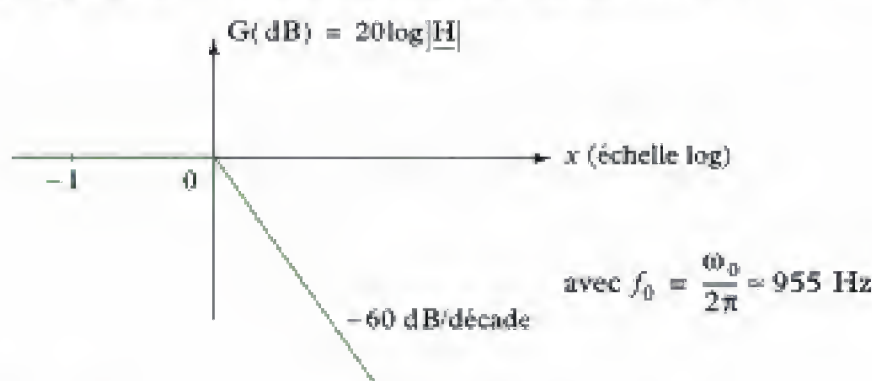
\Rightarrow en sortie :

$$\begin{aligned} s_3(t) &= -\frac{4R_2E_m}{3\pi\sqrt{2} \cdot R_1} \sin(1\,200\pi t) \\ &= -3E_m \sin(1\,200\pi t) \end{aligned}$$

Exercices de niveau 3

Exercice 5

1) On commence par donner l'allure du diagramme de Bode du gain du filtre qui, au vu de l'expression donnée pour $|H|$, est du 3^e ordre et de type passe-bas (méthode 1) :

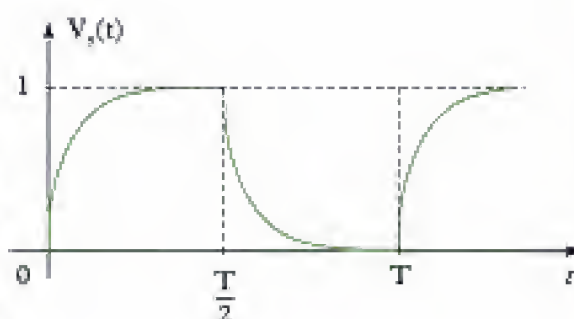


a) Si $T = 10 \text{ ms}$, alors :

$$f = \frac{1}{T} = 100 \text{ Hz} = \frac{f_0}{10}$$

$$\Rightarrow x = 0,1 \text{ ou } \log x = -1.$$

Outre la valeur moyenne de $V_e(t)$ qui est transmise, les harmoniques 3, 4, 7, 9 sont aussi situés dans la bande passante (le signal carré ne possède que des harmoniques de rang pair) ce qui permet de conclure que le signal est transmis en sortie sans trop de déformation sauf au niveau des discontinuités :

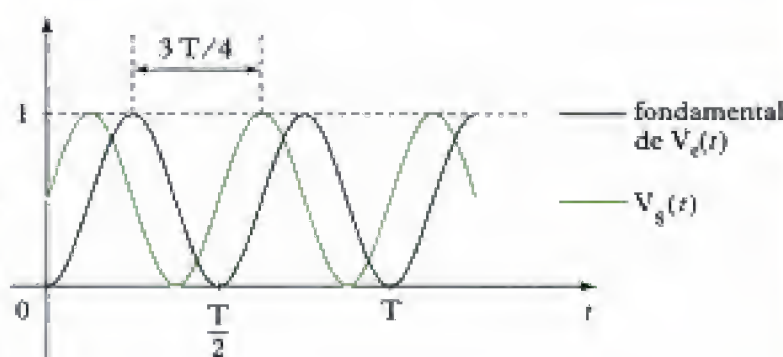


b) Si $T = 1 \text{ ms}$, alors $f = 1 \text{ kHz} = f_0$.

Le filtre laisse passer la composante continue : le fondamental est atténué d'environ 3 dB $\left(|H|(x=1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ tan-

dis que les harmoniques de rang supérieur sont très vite atténués.

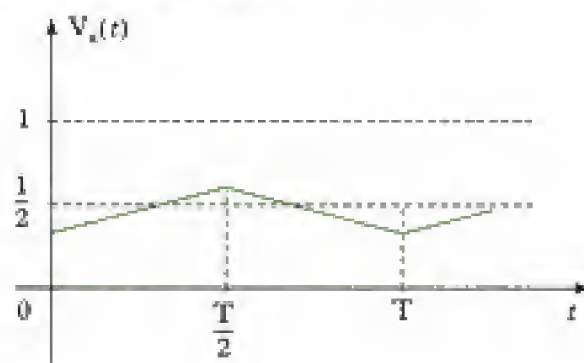
La pente de la bande coupée étant très élevée (-60 dB/décade), le signal de sortie est donc proche du fondamental :



Remarque : l'amplitude du fondamental de $V_e(t)$ peut être déterminée si l'énoncé donne par exemple la série de Fourier de $V_e(t)$; le déphasage entre le fondamental de $V_e(t)$ et $V_s(t)$ se détermine à l'aide de $\underline{H}(j\omega)$ pour $\omega = \omega_0$ (ici environ 135° soit $\frac{3T}{4}$ de décalage temporel).

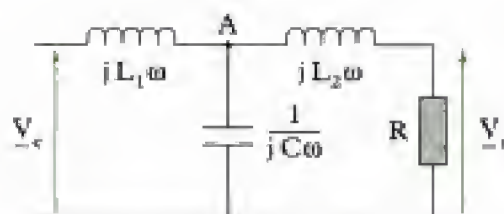
c) Si $T = 0,1 \text{ ms}$, alors $f = 10 \text{ kHz} \approx 10 f_0$.

Les harmoniques sont tous fortement atténués donc le signal est légèrement ondulé autour de sa valeur moyenne :



2) On commence par appliquer le théorème de Millman au point A :

$$\underline{V}_A = \frac{\frac{\underline{V}_e}{jL_1\omega} + \frac{\underline{V}_s}{jL_2\omega}}{\frac{1}{jL_1\omega} + \frac{1}{jL_2\omega}}$$



Le diviseur de tension donne :

$$\underline{V}_s = \frac{R}{R + jL_2\omega} \cdot \underline{V}_A \quad \text{donc} \quad \left(jC\omega + \frac{1}{jL_1\omega} + \frac{1}{jL_2\omega} \right) \cdot \frac{R + jL_2\omega}{R} \cdot \underline{V}_s = \frac{\underline{V}_e}{jL_1\omega} + \frac{\underline{V}_s}{jL_2\omega}$$

$$\Leftrightarrow \underline{V}_s \cdot \left[\left(1 + j\frac{L_2\omega}{R} \right) \cdot \left(jC\omega + \frac{1}{jL_1\omega} + \frac{1}{jL_2\omega} \right) - \frac{1}{jL_2\omega} \right] = \frac{\underline{V}_e}{jL_1\omega}$$

Pour obtenir la forme proposée par l'énoncé pour \underline{H} , on cherche à regrouper les termes réels et les termes imaginaires purs :

$$\left[\left(1 + j\frac{L_2\omega}{R} \right) \cdot \left(jC\omega + \frac{1}{jL_1\omega} + \frac{1}{jL_2\omega} \right) - \frac{1}{jL_2\omega} \right] \times jL_1\omega = \left(1 + j\frac{L_2\omega}{R} \right) \left[L_1C(j\omega)^2 + 1 + \frac{L_1}{L_2} \right] - \frac{L_1}{L_2}$$

$$= 1 - L_1C\omega^2 + j\omega \left(\frac{L_1}{R} + \frac{L_2}{R} - \frac{L_1L_2C\omega^2}{R} \right)$$

Le carré du module de cette quantité s'écrit :

$$(1 - L_1C\omega^2) + \omega^2 \left(\frac{L_1}{R} + \frac{L_2}{R} - \frac{L_1L_2C\omega^2}{R} \right)^2 = 1 - 2L_1C\omega^2 + (L_1C)^2\omega^4 + \omega^2 \left(\frac{L_1}{R} + \frac{L_2}{R} \right)^2$$

$$- 2\omega^2 \left(\frac{L_1}{R} + \frac{L_2}{R} \right) \cdot \frac{L_1L_2C\omega^2}{R} + \left(\frac{L_1L_2C}{R} \right)^2 \omega^6$$

Il est donc possible d'obtenir :

$$|\underline{H}| = \left| \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + x^6}}$$

si les termes en ω^2 et ω^4 sont nuls et si $\left[\left(\frac{L_1L_2C}{R} \right)^2 \cdot \omega^6 \right]$ est égal à x^6 .

Hidden page

Hidden page

Caractère intégrateur ou dérivateur

Introduction

Un filtre est souvent utilisé dans un domaine de fréquences correspondant à sa bande passante. Cependant, nous allons voir dans ce chapitre qu'il peut avoir un comportement intéressant en dehors de celle-ci. En effet, ce filtre peut se comporter comme un intégrateur ou un dérivateur simple dans une certaine gamme de fréquences que nous essaierons de déterminer.

Nous allons d'abord étudier le caractère intégrateur d'un filtre passif ou actif puis le caractère dérivateur d'un filtre passif ou actif.

Plan du chapitre 4

A. Caractère intégrateur	120
1. Définitions	120
2. Filtre passe-bas du premier ordre	121
3. Filtre passe-bande du second ordre	123
4. Filtre passe-bas du second ordre	127
B. Caractère dérivateur	128
1. Définitions	128
2. Filtre passe-haut du premier ordre	130
3. Filtre passe-bande du second ordre	132
4. Filtre passe-haut du second ordre	135
C. Effet intégrateur ou dérivateur d'un filtre sur un signal périodique	136
1. Introduction	136
2. Étude du caractère intégrateur ou dérivateur	136
3. Effet intégrateur du filtre passe-bas du premier ordre	137
4. Effet dérivateur du filtre passe-haut du premier ordre	138
Méthodes	
L'essentiel ; mise en œuvre	139
Énoncés des exercices	144
Indications	147
Solution des exercices	148

A. Caractère intégrateur

A.1. Définitions

Dans cette partie, nous allons définir la méthode permettant de déterminer le domaine de fréquences pour lequel le filtre possède un caractère intégrateur et étudier trois exemples qui sont le filtre passe-bas du premier ordre, le filtre passe-bande du second ordre et le filtre passe-bas du second ordre.

A.1.1 - Que signifie « caractère intégrateur » ?

Nous donnons ici une définition générale qu'il faudra adapter aux filtres par la suite.

Définition 1

Un système électronique possède un caractère intégrateur si le signal de sortie représente une bonne approximation, à une constante multiplicative près, d'une primitive du signal d'entrée :

$$\frac{ds(t)}{dt} = k e(t).$$

Propriété 1

Physiquement, le caractère intégrateur pour un signal continu n'est pas réalisable (ceci suppose une sortie infinie).

Cette définition générale est délicate à appliquer aux filtres puisque le caractère intégrateur d'un filtre n'est observé que sur une certaine gamme de fréquences. L'étude doit donc être effectuée dans le domaine fréquentiel avec les outils dont nous disposons pour l'étude des filtres dans ce domaine qui sont les diagrammes de Bode.

A.1.2 - Étude des diagrammes de Bode

Essayons de trouver une définition dans le domaine fréquentiel de l'effet intégrateur du filtre.

Le caractère intégrateur s'exprime sous la forme d'une relation entre grandeur d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$:

$$\frac{ds(t)}{dt} \approx k e(t), \text{ soit en notation complexe : } \underline{s} \approx -j \frac{k}{\omega_1} \underline{e}$$

pour un signal d'entrée $\underline{e} = E e^{j2\pi\omega_1 t}$.

Donc la fonction de transfert est :

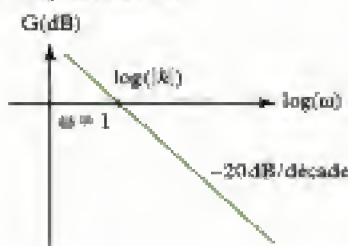
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = -j \frac{k}{\omega} = \frac{k}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

dont les diagrammes de Bode, dans le domaine de fréquences où le circuit est intégrateur, sont tels que :

• le gain est¹ :

$$20 \log \left(\left| \frac{\underline{s}}{\underline{e}} \right| \right) \approx 20 \log(k) - 20 \log(\omega);$$

1. Représentation :



Hidden page

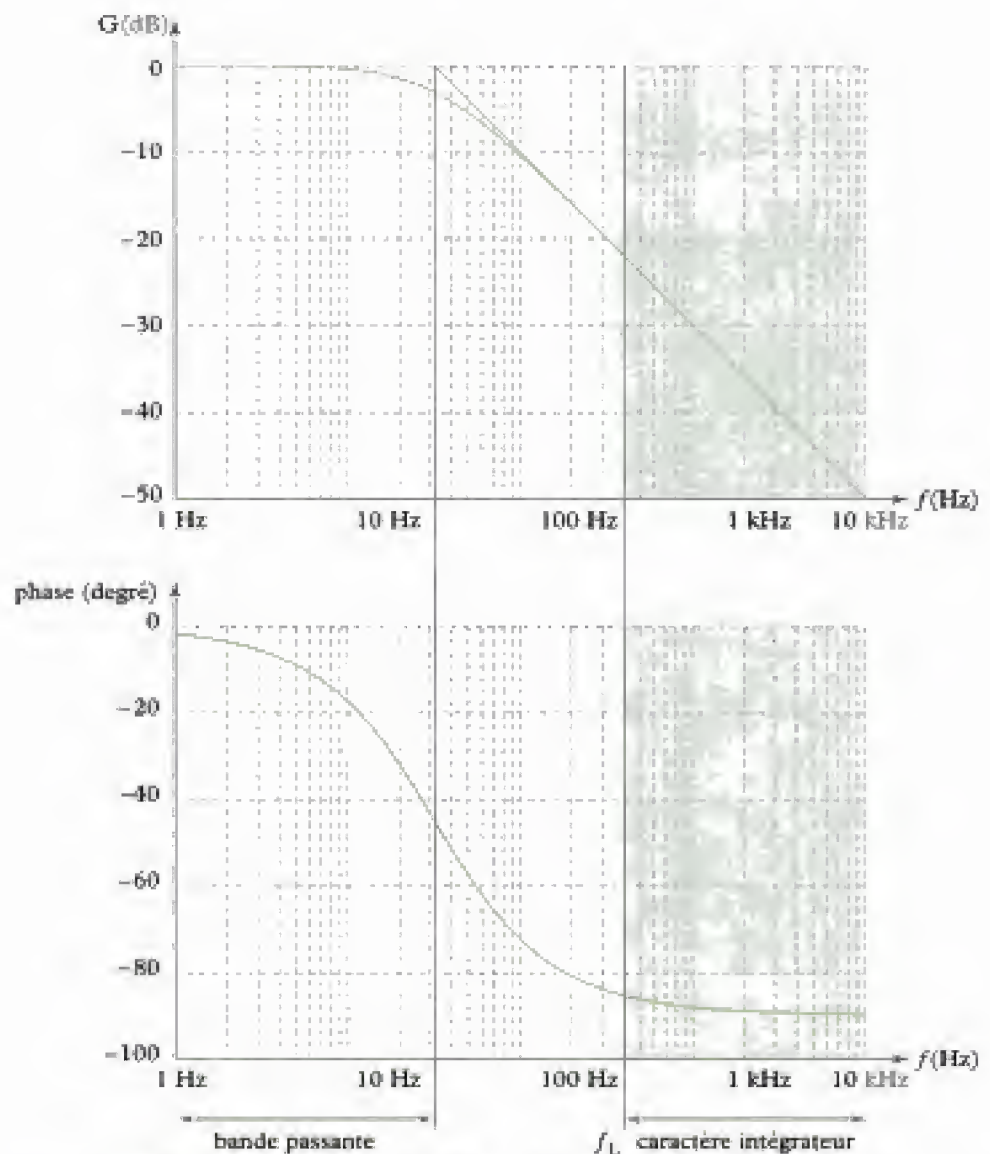


Fig. 2 - Diagrammes de Bode du filtre passe-bas avec $R = 5k\Omega$ et $C = 1 \mu F$.

Dans ce cas, c'est le critère à 5 % sur la phase qui permet la mesure de la fréquence limite f_L du caractère intégrateur. L'étude du diagramme de Bode de la phase (figure 2) donne une fréquence f_L proche de 400 Hz.

Une mesure en simulation donne :

$$f_L \approx 370 \text{ Hz}$$

et montre que le gain du filtre est inférieur à -21,4 dB sur cette gamme de fréquences (le signal d'entrée est fortement atténué).

A.2.2 - Domaine de fréquences du caractère intégrateur

Nous déterminons par calcul la bande de fréquences dans laquelle un filtre passe-bas du premier ordre a un effet intégrateur. Soit un filtre passe-bas de fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Ce filtre possède un caractère intégrateur si :

$$\underline{H}(j\omega) = -j\frac{H_0\omega_0}{\omega}$$

Ce qui donne :

$$20\log(|\underline{H}(j\omega)|) = 20\log(|H_0|\omega_0) - 20\log(\omega) \quad \text{et} \quad \text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = \pm \frac{\pi}{2}$$

suivant le signe de H_0 . Ceci est vérifié si :

$$\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1, \quad \text{soit : } \omega \gg \omega_0.$$

Propriété 2

Un filtre passe-bas du premier ordre possède un caractère intégrateur pour un signal sinusoïdal si la pulsation de ce signal est telle que :

$$\omega \gg \omega_0^1, \quad \text{où } \omega_0 \text{ est la pulsation propre du filtre.}$$

1. Nous prendrons $\omega \geq 10\omega_0$.

Remarquons que pour $\omega = 10\omega_0$, la phase est égale à $-1,47$ rad soit un écart relatif d'environ 6 %, ce qui explique le choix du critère à 5 % sur la phase. Le résultat de l'étude théorique (d'écart relatif proche de 6 %) et celui de l'étude graphique (à 5 %) ne sont donc pas rigoureusement identiques. Néanmoins l'ordre de grandeur doit être respecté.

Application 1 Passe-bas du premier ordre intégrateur

Soit le filtre de la figure 1 avec $R = 5 \text{ k}\Omega$ et $C = 1 \mu\text{F}$. Quel est le domaine de fréquences pour lequel on peut considérer le filtre comme un système intégrateur ?

Commenter le résultat de l'étude du diagramme de Bode de la figure 2.

Solution

La fonction de transfert du filtre est : $\underline{H} = \frac{s}{s} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + 5,0 \cdot 10^{-3}j\omega}$.

On en déduit la pulsation propre $\omega_0 = 200 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Ce filtre possède un caractère intégrateur si $\omega \geq 10\omega_0$ d'après la propriété 2. Ce qui donne :

$$\underline{H} = -j \frac{1}{5,0 \cdot 10^{-3}\omega}.$$

On en déduit $\omega \geq 2 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ dans le domaine intégrateur.

Le domaine de fréquences du caractère intégrateur est alors :

$$f \geq 320 \text{ Hz}.$$

La fréquence limite est $f_L = 320 \text{ Hz}$. Ce résultat est du même ordre de grandeur que celui obtenu au paragraphe A.2.1. Il n'est pas rigoureusement identique.

A.3. Filtre passe-bande du second ordre

A.3.1 - Exemple simple

Étudions le filtre passe-bande passif du second ordre suivant, dont le signal d'entrée est noté $e(t)$ et le signal de sortie $s(t)$:

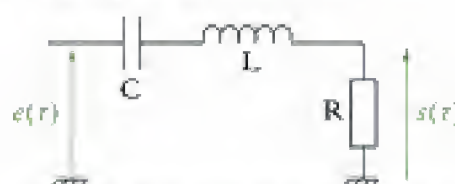


Fig. 3 - Exemple de filtre passif passe-bande du second ordre.

La fonction de transfert de ce filtre est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}, \quad \text{où } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et } Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Ce filtre possède un caractère intégrateur si le diagramme de Bode du gain possède une pente de -20 dB par décade et l'argument est proche de $-\frac{\pi}{2}$.

• Nous étudions le diagramme de Bode pour une valeur de $Q = 0,25$:

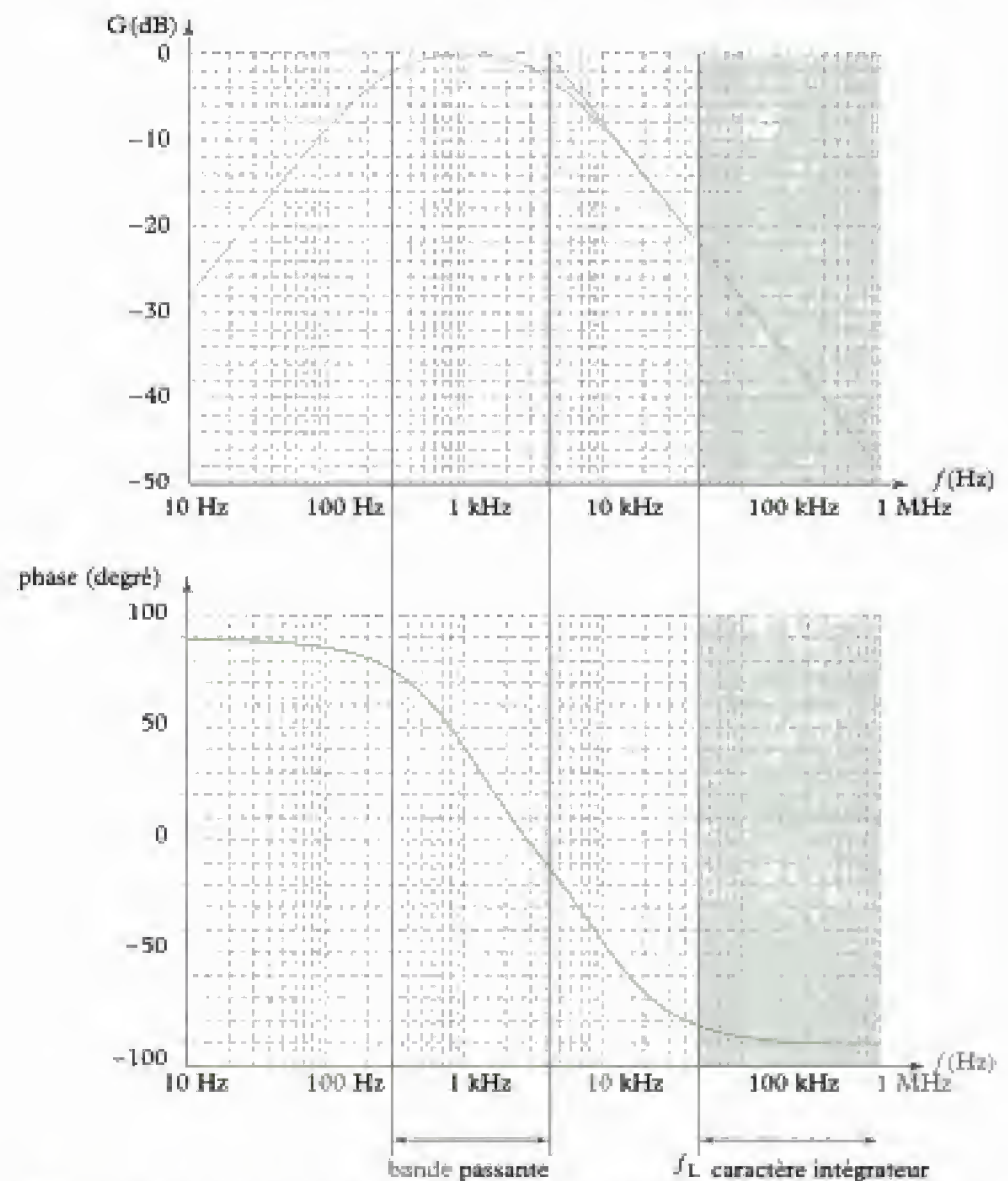


Fig. 4 - Diagrammes de Bode du filtre passe-bande avec $R = 630 \Omega$, $C = 1 \mu F$ et $L = 25 mH$.

Dans ce cas, c'est le critère à 5 % sur la phase qui permet la mesure de la fréquence limite f_L du caractère intégrateur. L'étude du diagramme de Bode de la phase (figure 4) donne une fréquence f_L proche de 50 kHz.

Une mesure précise en simulation donne :

$$f_L = 46 kHz.$$

Il est à noter que l'atténuation du signal d'entrée sur la gamme de fréquences du caractère intégrateur est important (supérieur à 20 dB).

- Nous étudions le diagramme de Bode pour une valeur de $Q = 10$:

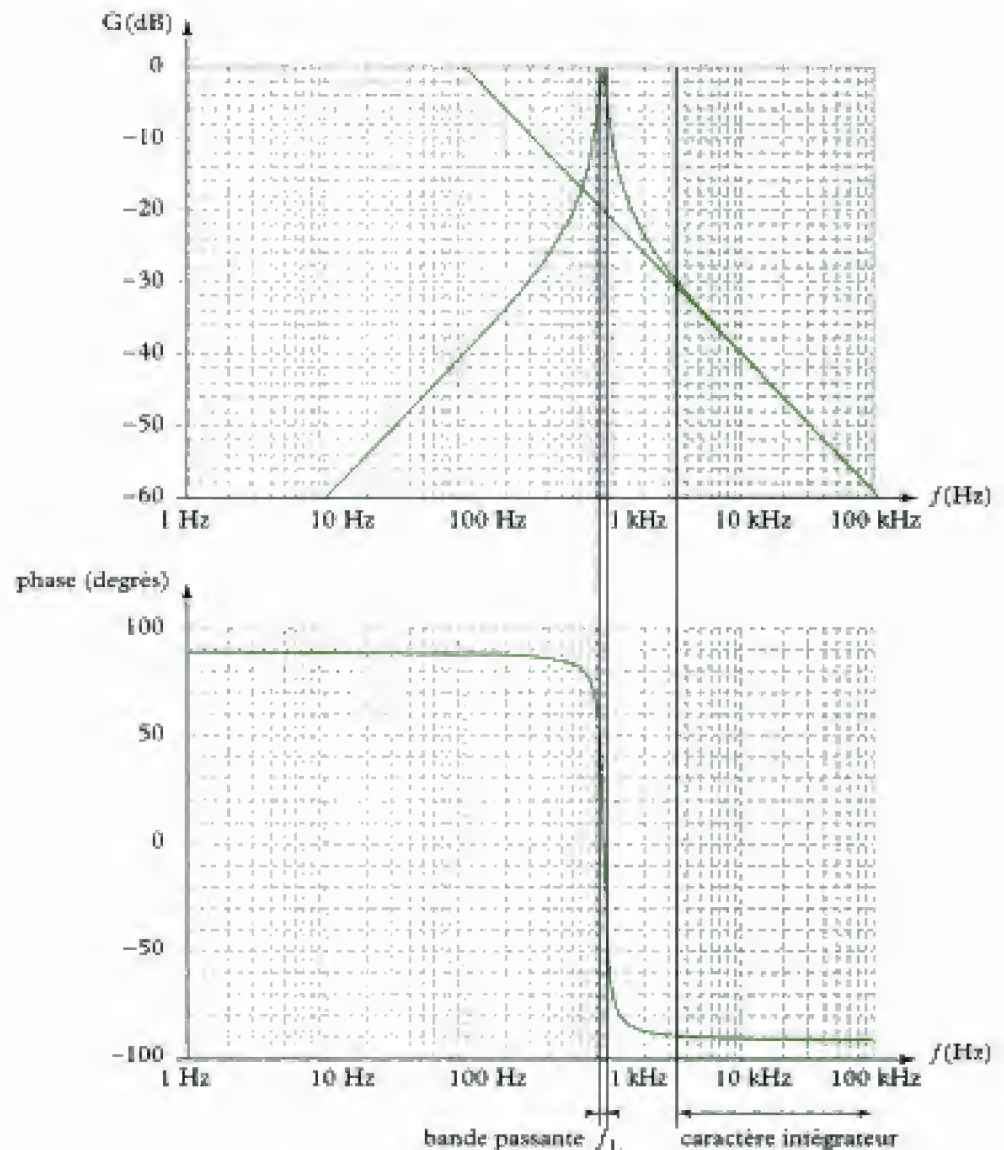


Fig. 5 - Diagrammes de Bode du filtre passe-bande avec $R = 16 \Omega$, $C = 1 \mu F$ et $L = 25$ mH.

Dans ce cas, la mesure de la fréquence limite f_L s'effectue sur la courbe du gain de la figure 5 pour un écart de 10 % entre l'amplification sur l'asymptote et l'amplification réelle. Ceci correspond en dB à un gain sur l'asymptote augmenté ou réduit d'environ 0,9 dB ($= 20\log(0,9)$) et proche de $20\log(1,1)$ par rapport au gain réel. Ce critère donne une fréquence f_L proche de 3,3 kHz.

Une mesure en simulation donne :

$$f_L = 3,4 \text{ kHz.}$$

Il est à noter que l'atténuation du signal d'entrée sur la gamme de fréquences du caractère intégrateur est forte.

Nous remarquons, d'après ces deux études, que la gamme de fréquences pour le caractère intégrateur dépend du facteur de qualité.

Nous allons maintenant déterminer de manière théorique cette limite.

A.3.2 - Domaine de fréquences du caractère intégrateur

Nous déterminons par calcul la bande de fréquences dans laquelle un filtre passe-bande du second ordre a un effet intégrateur.

Soit un filtre passe-bande du second ordre de fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jH_0 \frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Ce filtre possède un caractère intégrateur si :

$$\underline{H}(j\omega) \approx -j \frac{H_0 \omega_0}{Q\omega},$$

ce qui donne :

$$20\log(|\underline{H}(j\omega)|) \approx 20\log\left(\frac{|H_0|\omega_0}{Q}\right) - 20\log(\omega) \quad \text{et} \quad \text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) \approx \pm \frac{\pi}{2}$$

suivant le signe de H_0 . Ceci est vérifié si :

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \gg 1 \quad \text{et} \quad \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \gg \frac{\omega}{Q\omega_0},$$

c'est-à-dire pour $\omega^2 \gg \omega_0^2$ et $\omega \gg \frac{\omega_0}{Q}$ suivant la valeur du coefficient de qualité Q .

Propriété 3

Un filtre passe-bande du second ordre possède un caractère intégrateur pour un signal sinusoïdal si la pulsation de ce signal est telle que :

$$\omega^2 \gg \omega_0^2 \quad \text{et} \quad \omega \gg \frac{\omega_0}{Q},$$

où Q est le facteur de qualité du filtre et ω_0 sa pulsation propre.

1. Nous prendrons : $\omega \geq \sqrt{10}\omega_0$ et $\omega \geq 10\frac{\omega_0}{Q}$.

L'influence du facteur de qualité est ici mise en évidence.

Étudions les critères graphiques utilisés dans le paragraphe A.3.1.

• Si le domaine est défini par $\omega \geq \sqrt{10}\omega_0$, alors $\sqrt{10}\omega_0 \geq 10\frac{\omega_0}{Q}$, donc $Q \geq \sqrt{10}$.

C'est le cas où $Q = 10$ et nous avons étudié le diagramme de Bode du gain.

Le gain pour $\omega = \sqrt{10}\omega_0$ et $H_0 = 1$ est $G = -29,1$ dB et sur l'asymptote, $G = 20\log\left(\frac{\omega_0}{Q\omega}\right) = -30$ dB, ce qui correspond bien à la limite de 0,9 dB autour du gain réel que nous avons fixé.

• Si le domaine est défini par $\omega \geq 10\frac{\omega_0}{Q}$, alors $\sqrt{10}\omega_0 \leq 10\frac{\omega_0}{Q}$, donc $Q \leq \sqrt{10}$. C'est le cas pour $Q = 0,25$ et nous avons étudié le diagramme de Bode de la phase.

La phase pour $\omega = 10\frac{\omega_0}{Q}$ est : $\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{\frac{10}{Q^2}}{\left(1 - \frac{100}{Q^2}\right)}\right) = -1,47$ rad.

L'écart relatif entre cette valeur et $-\frac{\pi}{2}$ est d'environ 6 %, ce qui explique le choix du critère.

Dans la suite, nous utiliserons les critères définis dans le paragraphe A.1.2. sans démonstration pour les filtres du premier et du second ordre.

Application 2 Passe-bande du second ordre intégrateur

Soit le filtre de la figure 3 avec $L = 25 \text{ mH}$, $R = 630 \, \Omega$ et $C = 1 \, \mu\text{F}$. Quel est le domaine de fréquences pour lequel on peut considérer le filtre comme un système intégrateur ?

Commenter le résultat de l'étude du diagramme de Bode de la figure 4.

Solution

La fonction de transfert du filtre est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} = \frac{j63 \cdot 10^{-5}\omega}{1 + j63 \cdot 10^{-5}\omega - 25 \cdot 10^{-9}\omega^2}.$$

On en déduit la pulsation propre $\omega_0 \approx 6,3 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et le coefficient de qualité $Q = 0,25$.

Ce filtre possède un caractère intégrateur si $\omega \approx \sqrt{10}\omega_0$ et $\omega \approx 10\frac{\omega_0}{Q}$ d'après la propriété 3,

ce qui donne :

$$\underline{H}(j\omega) \approx -j\frac{R}{L\omega} = -j\frac{63 \cdot 10^{-5}}{25 \cdot 10^{-9}\omega}.$$

On en déduit $\omega \approx 2 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega \approx 2,5 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ pour le caractère intégrateur, d'où :

$$f \approx 3,2 \text{ kHz} \quad \text{et} \quad f \approx 40 \text{ kHz}.$$

Le domaine de fréquence du caractère intégrateur du filtre est :

$$f \approx 40 \text{ kHz}.$$

La fréquence limite du domaine est $f_L = 40 \text{ kHz}$. Ce résultat est du même ordre de grandeur et donc en accord avec l'étude du paragraphe A.3.1.

A.4. Filtre passe-bas du second ordre

Le filtre passe-bas du second ordre a une fonction de transfert du type :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Il possède un caractère intégrateur si :

$$\underline{H}(j\omega) \approx -j\frac{H_0 Q \omega_0}{\omega},$$

c'est-à-dire : $\frac{\omega}{Q\omega_0} \gg 1$ et $\frac{\omega}{Q\omega_0} \gg \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$,

ce qui donne : $\omega \gg Q\omega_0$ et $\omega \ll \frac{\omega_0}{Q}$.

Donc, nous prendrons $\omega \approx 10Q\omega_0$ et $\omega \leq \frac{\omega_0}{10Q}$. Il faut de ce fait que $Q \leq 0,1$ pour que cela soit possible.

Prenons l'exemple d'un filtre passe-bas du second ordre (figure 6) de coefficient de qualité égal à 0,01 et de pulsation propre $\omega_0 = 63 \cdot 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

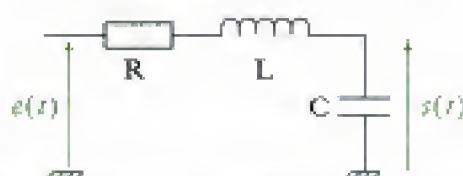


Fig. 6 - Filtre passe-bas passif du second ordre.

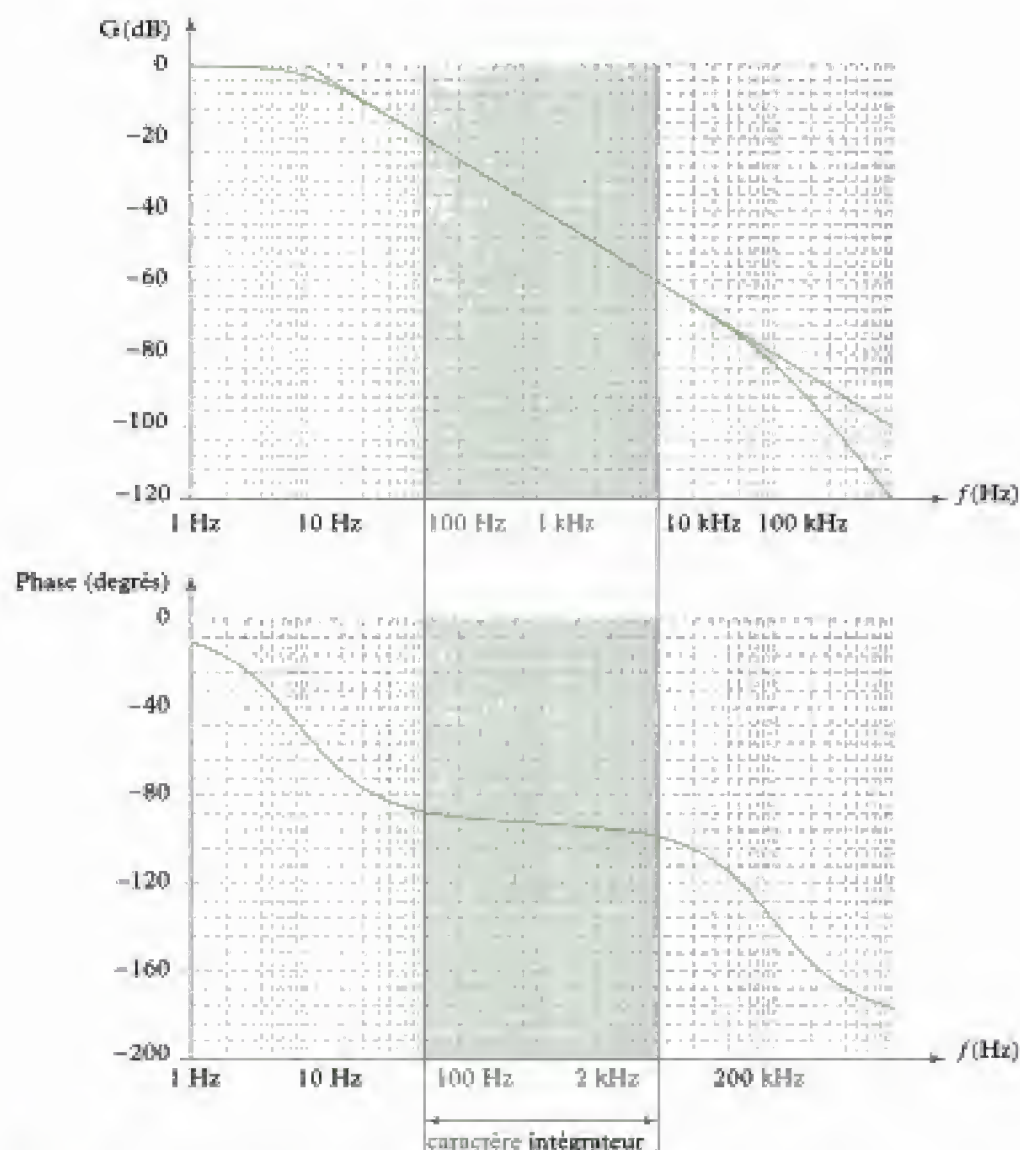


Fig. 7 - Diagrammes de Bode du filtre passe-bas avec $R = 16 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$ et $L = 25 \text{ mH}$.

L'application du critère à 5 % sur la phase (figure 7) donne un caractère intégrateur¹ pour $100 \text{ Hz} \leq f \leq 10 \text{ kHz}$ qui correspond à :

$$10Q\omega_0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{10Q}$$

Une mesure plus précise sur simulateur nous donne un caractère intégrateur pour :

$$110 \text{ Hz} \leq f \leq 9 \text{ kHz}.$$

Il est à noter que l'atténuation du signal d'entrée sur la gamme de fréquences du caractère intégrateur est importante.

B. Caractère dérivateur

B.1. Définitions

Dans cette partie, nous allons définir la méthode permettant de déterminer le domaine de fréquences pour lequel le filtre possède un caractère dérivateur et étudier trois exemples qui sont le filtre passe-haut du premier ordre, le filtre passe-bande du second ordre et le filtre passe-haut du second ordre.

1. Dans le cas où $\omega \gg \frac{\omega_0}{Q}$, le filtre se comporte alors comme un double intégrateur.

B.1.1 - Que signifie « caractère dérivateur » ?

Nous donnons ici une définition générale qu'il faudra adapter aux filtres par la suite.

Définition 3

Un système électronique possède un **caractère dérivateur** si le signal de sortie représente une bonne approximation, à une constante multiplicative près, de la dérivée du signal d'entrée :

$$s(t) \approx k \frac{de(t)}{dt}$$

Cette définition générale est délicate à appliquer aux filtres puisque le caractère dérivateur d'un filtre n'est observé que sur une certaine gamme de fréquences. L'étude doit donc être effectuée dans le domaine fréquentiel avec les outils dont nous disposons pour l'étude des filtres dans ce domaine qui sont les diagrammes de Bode.

B.1.2 - Étude des diagrammes de Bode

Essayons de trouver une définition dans le domaine fréquentiel de l'effet dérivateur du filtre.

Le caractère dérivateur s'exprime sous la forme d'une relation entre grandeur d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$:

$$s(t) = k \frac{de(t)}{dt}, \text{ soit en notation complexe : } \underline{s} = j\omega_1 k \underline{e}$$

pour un signal d'entrée $\underline{e} = Ee^{j2\pi f_1 t}$.

Donc la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = j\omega k = \omega k e^{j\frac{\pi}{2}}$$

dont les diagrammes de Bode, dans le domaine de fréquences où le circuit est dérivateur, sont tels que :

• le gain¹ est :

$$20 \log \left(\left| \frac{\underline{s}}{\underline{e}} \right| \right) \approx 20 \log(|k|) + 20 \log(\omega)$$

• la phase est constante² et égale à $\frac{\pi}{2}$ (si $k > 0$) et $-\frac{\pi}{2}$ (si $k < 0$).

On en déduit une autre détermination du caractère dérivateur d'un filtre :

Définition 4

Un système électronique possède un **caractère dérivateur** pour un signal d'entrée sinusoïdal de fréquence f_1 si autour de cette fréquence :

- le gain du filtre possède une pente de **+20 dB par décade**,
- le signal de sortie est **en quadrature de phase** avec le signal d'entrée³.

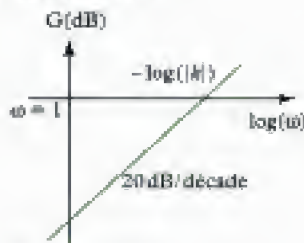
Ces critères dépendent de l'utilisation du signal. Dans cet ouvrage, nous prendrons, de manière arbitraire, une tolérance de 5 % sur la phase et de 10 % sur l'amplification.

Il est à noter que ce caractère dérivateur se situe en dehors de la bande passante du filtre, ce qui signifie que le signal de sortie est fortement atténué.

Nous pouvons maintenant déterminer le caractère dérivateur d'un filtre pour un signal d'entrée sinusoïdal. La mesure sur les diagrammes de Bode donne des résultats approchés.

Examinons les exemples suivants.

1. Représentation :



2. Représentation :



3. Le signal de sortie est en quadrature avancé ou retardé suivant le signe de k .

B.2. Filtre passe-haut du premier ordre

B.2.1 - Exemple simple

Le filtre passe-haut du premier ordre (figure 8), dont le signal d'entrée est noté $e(t)$ et le signal de sortie $s(t)$, est alimenté par un signal sinusoïdal.

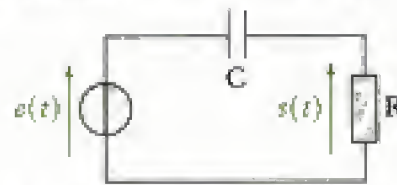


Fig. 8 - Exemple de filtre passif passe-haut du premier ordre.

La fonction de transfert de ce filtre est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}, \quad \text{où} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}.$$

Ce filtre possède un caractère dérivateur si le diagramme de Bode du gain possède une pente de +20 dB par décade et l'argument est proche de $\frac{\pi}{2}$.

Nous étudions les diagrammes de Bode suivants :

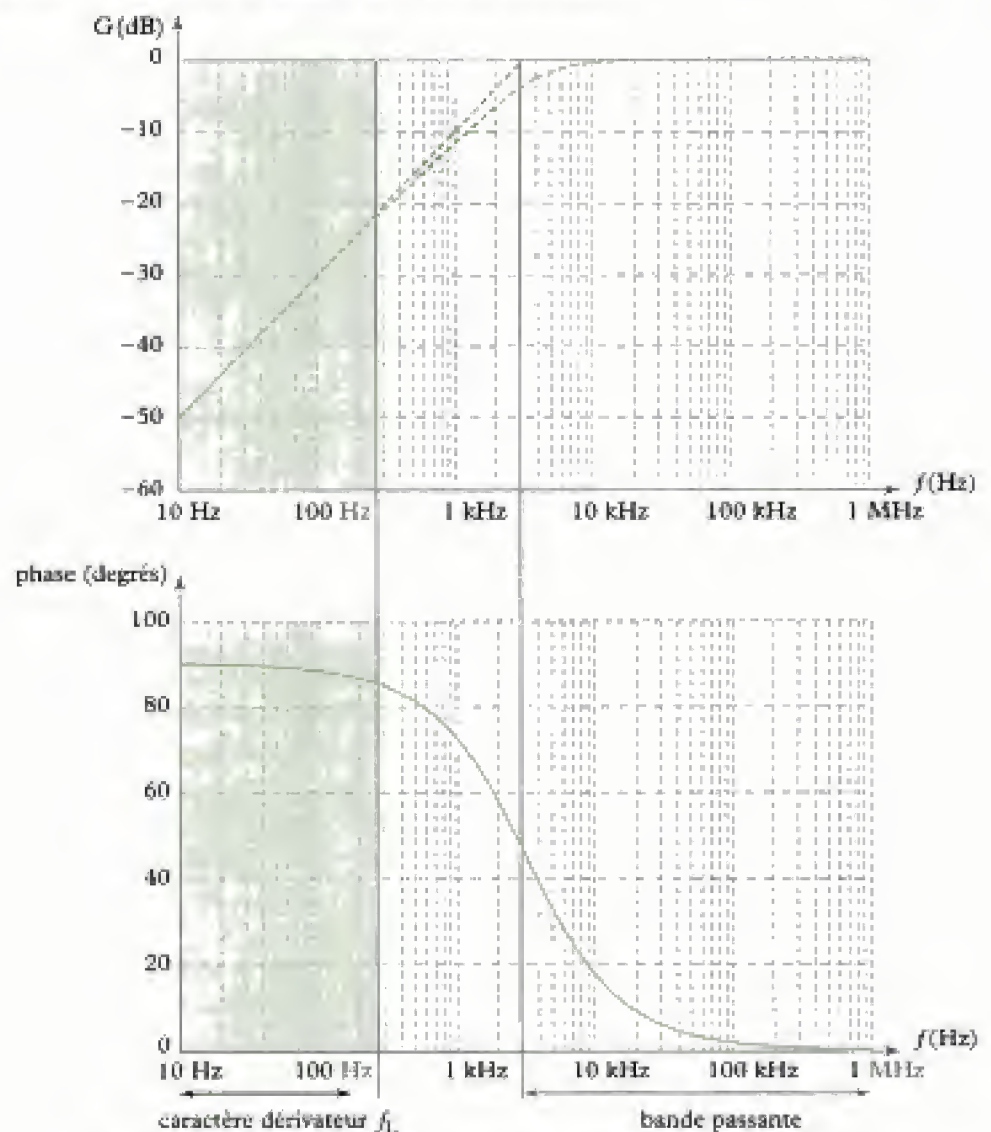


Fig. 9 - Diagrammes de Bode du filtre passe-haut avec $R = 5 \text{ k}\Omega$ et $C = 10 \text{ nF}$.

Dans ce cas, c'est le critère à 5 % sur la phase qui permet la mesure de la fréquence limite f_L du caractère dérivateur. L'étude du diagramme de Bode de la phase (figure 9) donne une fréquence f_L proche de 270 Hz.

Une mesure en simulation donne :

$$f_L = 280 \text{ Hz}$$

et montre que le gain du filtre est inférieur à - 21,2 dB sur cette gamme de fréquence (le filtre atténue fortement le signal d'entrée).

B.2.2 - Domaine de fréquences du caractère dérivateur

Nous déterminons par calcul la bande de fréquences dans laquelle un filtre passe-haut du premier ordre a un effet dérivateur. Soit un filtre passe-haut de fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jH_0 \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Ce filtre possède un caractère dérivateur si :

$$\underline{H}(j\omega) = j \frac{H_0 \omega_0}{\omega},$$

ce qui donne :

$$20 \log(|\underline{H}(j\omega)|) = 20 \log\left(\left|\frac{H_0}{\omega_0}\right|\right) + 20 \log(\omega) \quad \text{et} \quad \text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = \pm \frac{\pi}{2}$$

suivant le signe de H_0 . Ceci est vérifié si :

$$\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1, \quad \text{soit : } \omega \ll \omega_0.$$

Propriété 4

Un filtre passe-haut du premier ordre possède un caractère dérivateur pour un signal sinusoïdal si la pulsation de ce signal est telle que :

$$\omega \ll \omega_0, \quad \text{où } \omega_0 \text{ est la pulsation propre du filtre.}^1$$

1. Nous prendrons $\omega \leq \frac{\omega_0}{10}$.

Application 3 Passe-haut du premier ordre dérivateur

Soit le filtre de la figure 8 avec $R = 5 \text{ k}\Omega$ et $C = 10 \text{ nF}$. Quel est le domaine de fréquences pour lequel on peut considérer le filtre comme un système dérivateur ?

Commenter le résultat de l'étude du diagramme de Bode de la figure 9.

Solution

La fonction de transfert du filtre est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{5 \cdot 10^{-5} j\omega}{1 + 5 \cdot 10^{-5} j\omega}.$$

On en déduit la pulsation propre $\omega_0 \approx 2 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Ce filtre possède un caractère dérivateur si $\omega \leq \frac{\omega_0}{10}$ d'après la propriété 4. Ce qui donne :

$$\underline{H}(j\omega) = jRC\omega = 5 \cdot 10^{-5} j\omega.$$

On en déduit $\omega \leq 2 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ pour le caractère dérivateur.

Le domaine de fréquence du caractère dérivateur est alors :

$$f \leq 320 \text{ Hz}.$$

La fréquence limite du domaine est $f_L = 320 \text{ Hz}$. Ce résultat est en accord avec le résultat obtenu au paragraphe B.2.1.

B.3. Filtre passe-bande du second ordre

B.3.1 - Exemple simple

Étudions le filtre passe-bande passif du second ordre suivant, dont le signal d'entrée est noté $e(t)$ et le signal de sortie $s(t)$:

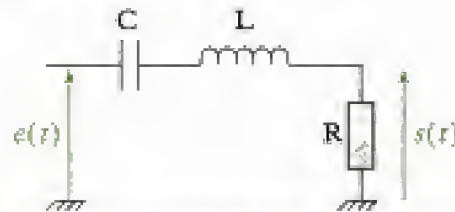


Fig. 10 - Exemple de filtre passif passe-bande du second ordre.

La fonction de transfert de ce filtre est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}, \quad \text{où } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Ce filtre possède un caractère dérivateur si le diagramme de Bode du gain possède une pente de +20 dB par décade et l'argument est proche de $\frac{\pi}{2}$.

- Nous étudions le diagramme de Bode pour une valeur de $Q = 0,25$:

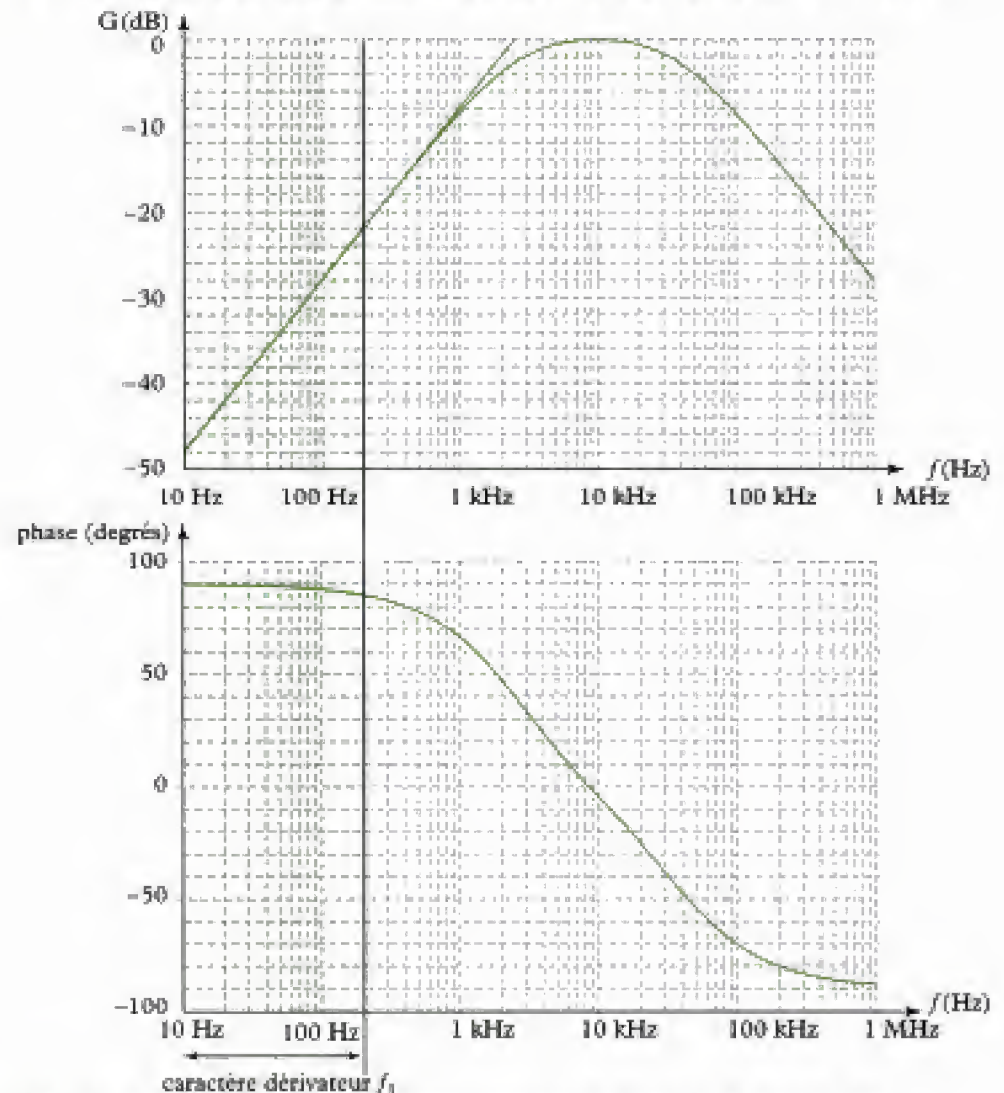


Fig. 11 - Diagrammes de Bode du filtre passe-bande avec $R = 6,3 \text{ k}\Omega$, $C = 10 \text{ nF}$ et $L = 25 \text{ mH}$.

Dans ce cas, c'est le critère à 5 % sur la phase qui permet la mesure de la fréquence limite f_L du caractère intégrateur. L'étude du diagramme de Bode de la phase (figure 11) donne une fréquence f_L proche de $2 \cdot 10^2$ Hz.

Une mesure précise en simulation donne :

$$f_L = 220 \text{ Hz.}$$

Il est à noter que l'atténuation du signal d'entrée sur la gamme de fréquences du caractère dérivateur est forte.

• Nous étudions le diagramme de Bode pour une valeur de $Q = 10$:

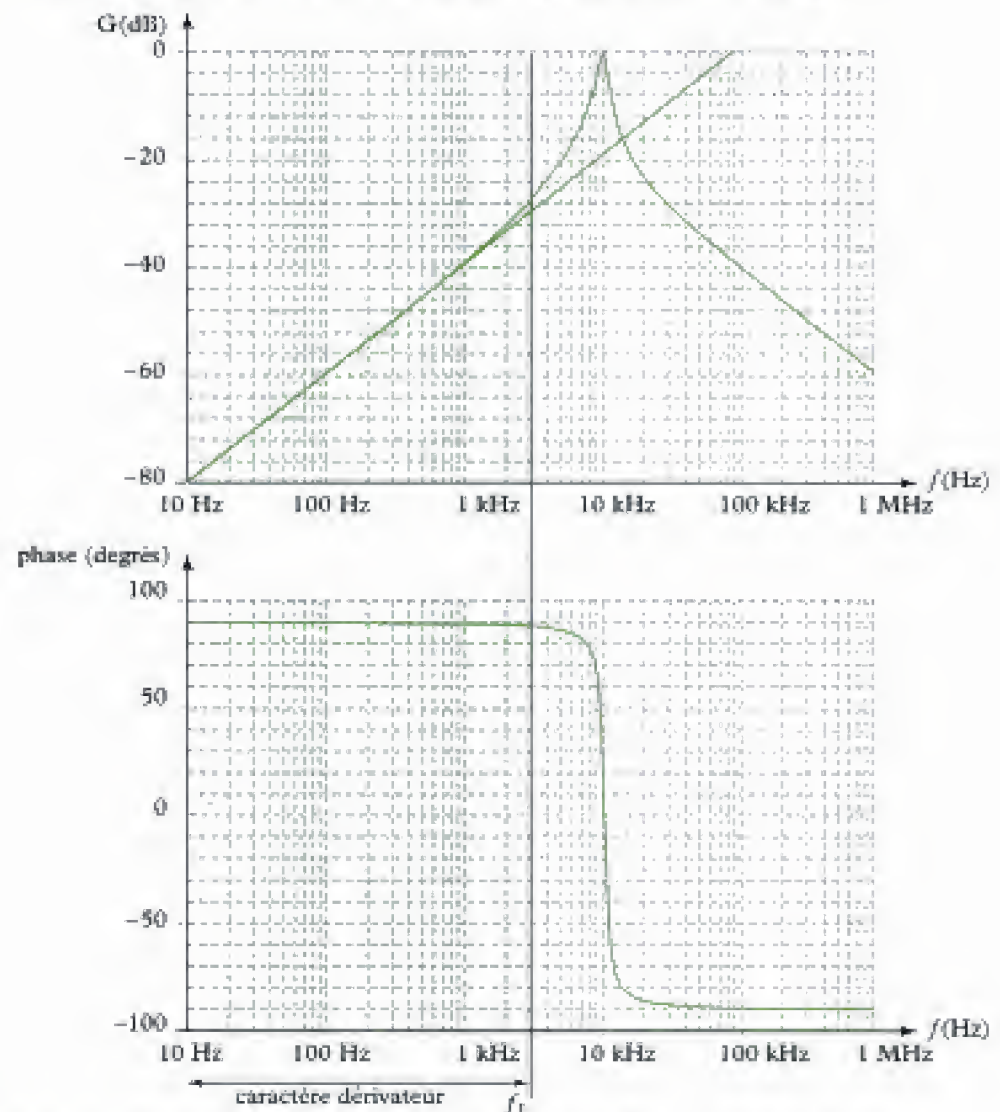


Fig. 12 - Diagrammes de Bode du filtre passe-bande avec $R = 160 \Omega$, $C = 10 \text{ nF}$ et $L = 25 \text{ mH}$.

Dans ce cas, la mesure de la fréquence limite f_L s'effectue sur la courbe du gain de la figure 12 pour un écart de 10 % entre l'amplification sur l'asymptote et l'amplification réelle. Ceci correspond en dB à un gain sur l'asymptote augmenté ou réduit d'environ 0,9 dB ($\approx 20\log(0,9)$ et proche de $20\log(1,1)$) par rapport au gain réel. Ce critère donne une fréquence f_L proche de 3 kHz.

Une mesure en simulation donne :

$$f_L = 2,9 \text{ kHz.}$$

Il est à noter que l'atténuation du signal d'entrée sur la gamme de fréquences du caractère dérivateur est forte.

Nous remarquons, d'après ces deux études, que la gamme de fréquences pour le caractère intégrateur dépend du facteur de qualité.

Nous allons maintenant déterminer de manière théorique cette limite.

B.3.2 - Domaine de fréquences du caractère dérivateur

Soit un filtre passe-bande du second ordre de fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jH_0 \frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Ce filtre possède un caractère dérivateur si :

$$\underline{H}(j\omega) = j \frac{H_0 \omega}{Q\omega_0},$$

ce qui donne :

$$20 \log(|\underline{H}(j\omega)|) \approx 20 \log\left(\frac{|H_0|}{Q\omega_0}\right) + 20 \log(\omega) \quad \text{et} \quad \text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = \pm \frac{\pi}{2}$$

suivant le signe de H_0 . Ceci est vérifié si :

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{\omega}{Q\omega_0} \ll 1,$$

c'est-à-dire pour $\omega^2 \ll \omega_0^2$ et $\omega \ll Q\omega_0$ suivant la valeur du coefficient de qualité Q .

Propriété 5

Un filtre passe-bande du second ordre possède un caractère dérivateur pour un signal sinusoïdal si la pulsation de ce signal est telle que :

$$\omega^2 \ll \omega_0^2 \quad \text{et} \quad \omega \ll Q\omega_0$$

où Q est le facteur qualité du filtre et ω_0 sa pulsation propre.

2. Nous prendrons $\omega \ll \frac{\omega_0}{\sqrt{10}}$ et $\omega \ll \frac{Q\omega_0}{10}$.

L'influence du facteur de qualité est ici mise en évidence.

Application 4 Passe-bande du second ordre dérivateur

Soit le filtre de la figure 10 où on considère $L = 25 \text{ mH}$, $R = 6,3 \text{ k}\Omega$ et $C = 10 \text{ nF}$. Quel est le domaine de fréquences pour lequel on peut considérer le filtre comme un système dérivateur ?

Commenter le résultat de l'étude du diagramme de Bode de la figure 11.

Solution

La fonction de transfert du filtre :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} = \frac{j63 \cdot 10^{-6}\omega}{1 + j63 \cdot 10^{-6}\omega - 25 \cdot 10^{-11}\omega^2}$$

On en déduit la pulsation propre $\omega_0 \approx 6,3 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et le coefficient de qualité $Q = 0,25$.

Ce filtre possède un caractère intégrateur si $\omega \ll \frac{\omega_0}{\sqrt{10}}$ et $\omega \ll \frac{Q\omega_0}{10}$, d'après la propriété 5,

ce qui donne : $\underline{H}(j\omega) \approx jRC\omega = j63 \cdot 10^{-6}\omega$.

On en déduit $\omega \ll 2 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega \ll 1,6 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ pour le caractère dérivateur. D'où : $f \ll 3,2 \text{ kHz}$ et $f \ll 250 \text{ Hz}$.

Le domaine de fréquence du caractère dérivateur du filtre est :

$$f \ll 250 \text{ Hz}.$$

La fréquence limite du domaine est $f_L = 250 \text{ Hz}$. Ce résultat est en accord avec l'étude du paragraphe B.3.1.

Hidden page

1. Dans le cas où $\omega \gg \frac{\omega_0}{Q}$, le filtre se comporte alors comme un double dérivateur.

L'application du critère à 5 % sur la phase (figure 14) donne un caractère dérivateur¹ pour :

$$100 \text{ Hz} \leq f \leq 10 \text{ kHz}$$

qui correspond à :

$$10Q\omega_0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{10Q}.$$

Une mesure plus précise sur simulateur nous donne un caractère dérivateur pour :

$$110 \text{ Hz} \leq f \leq 9 \text{ kHz}.$$

Il est à noter que l'atténuation du signal d'entrée sur la gamme de fréquences du caractère dérivateur est forte.

C. Effet intégrateur ou dérivateur d'un filtre sur un signal périodique

C.1. Introduction

Un signal périodique se décompose en série de Fourier sous la forme d'une somme de signaux de fréquences multiples de la fréquence du signal appelé fondamentale.

Le filtre possède un caractère dérivateur ou intégrateur pour ce signal périodique s'il possède un caractère dérivateur ou intégrateur pour tous les harmoniques contenus dans son spectre.

Donc, pour un signal de fréquence f_1 , il faut que le filtre soit dérivateur ou intégrateur pour les fréquences $f_1, 2f_1, 3f_1, 4f_1$, mais aussi $f = 0$ si le signal possède une composante continue¹.

Cela n'est pas toujours possible puisque le caractère intégrateur ou dérivateur n'est défini que sur une gamme de fréquences. Il faut alors trouver quel critère permet d'obtenir en sortie un signal proche du signal obtenu pour un dérivateur ou un intégrateur parfait.

C.2. Étude du caractère intégrateur ou dérivateur

Nous remarquons que la série de Fourier d'un signal périodique possède des termes d'amplitude négligeable devant d'autres.

Propriété 6

Un filtre possède un caractère dérivateur ou intégrateur pour un signal périodique s'il possède un caractère dérivateur ou intégrateur pour les harmoniques d'amplitude non négligeable² de ce signal.

Nous étudions dans ce chapitre deux types de signaux : signal carré et signal triangle.

• Signal carré d'amplitude E

Sa série de Fourier est de la forme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4E}{(2n+1)\pi} \cos((2n+1)\pi f t).$$

1. D'après la propriété 1, ceci n'est pas possible pour le caractère intégrateur.

2. Nous considérons que l'amplitude d'un harmonique est négligeable si elle est inférieure à 1/10 de l'amplitude de l'harmonique d'amplitude la plus importante.

Hidden page

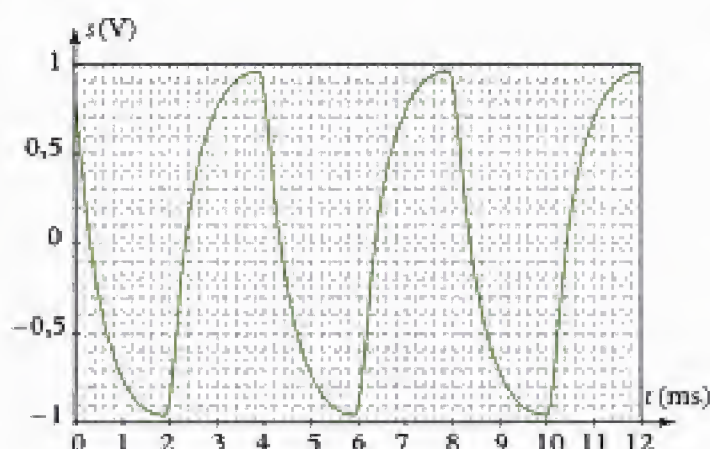


Fig. 17 - Signal de sortie pour une entrée carrée de fréquence $f_i = 25$ Hz.

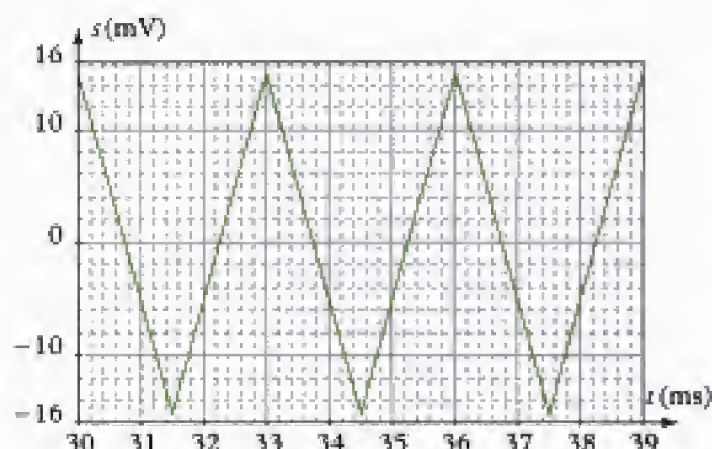


Fig. 18 - Signal de sortie pour une entrée carrée de fréquence $f_i = 333$ Hz.

Nous observons bien que, pour une fréquence supérieure à f_L , le signal a la forme triangulaire voulue, tandis que pour une fréquence inférieure, le caractère intégrateur n'est pas vérifié.

Il est à noter que dans la gamme de fréquences du caractère intégrateur, l'atténuation du filtre est importante.

C.4. Effet dérivateur pour le filtre passe-haut du premier ordre

Prenons l'exemple du filtre de la figure 8.

D'après l'étude, il possède un effet dérivateur pour tout signal périodique dont les harmoniques non négligeables ont une fréquence inférieure à $f_L = 320$ Hz.

Prenons un signal d'entrée triangle¹ de fréquence f_i et d'amplitude 1 V.

1. Nous utilisons un signal triangle car sa dérivée est un signal carré dont il est facile de vérifier la forme.

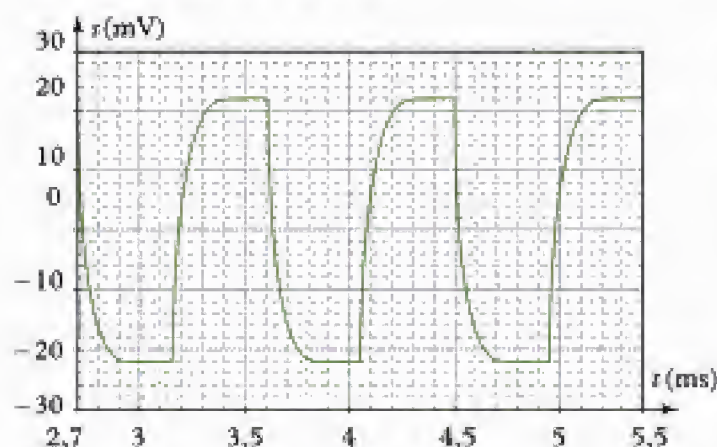


Fig. 19 - Signal de sortie pour une entrée triangle de fréquence $f_i = 1,1$ kHz.

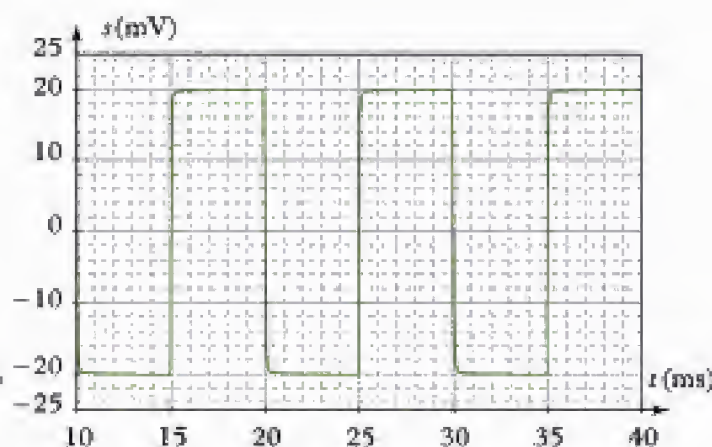


Fig. 20 - Signal de sortie pour une entrée triangle de fréquence $f_i = 100$ Hz.

Dans le cas de la figure 20, les harmoniques non négligeables du signal triangle sont dans le domaine dérivateur du filtre. Nous observons que le signal a la forme carrée voulue. Tandis que pour une fréquence supérieure (figure 19), le caractère dérivateur n'est pas vérifié.

Il est à noter que dans la gamme de fréquences du caractère dérivateur, l'atténuation du filtre est importante.

L'essentiel

✓ Caractère intégrateur

- Le caractère intégrateur d'un filtre est défini sur un domaine de fréquences limité dans lequel on peut écrire sa fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{s}{e} = -j \frac{k}{\omega}$$

où k est une constante positive ou négative.

• De manière graphique

Un système électronique possède un caractère intégrateur pour un signal d'entrée sinusoïdal de fréquence f_1 si autour de cette fréquence :

- le gain du filtre possède une pente de -20 dB par décade.
- le signal de sortie est en quadrature de phase avec le signal d'entrée.

Dans cet ouvrage, nous prendrons, de manière arbitraire, une tolérance de 5 % sur la phase et de 10 % sur l'amplification.

Type de filtre	Filtre passe-bas du 1 ^{er} ordre	Filtre passe-bas du 2 nd ordre	Filtre passe-bande du 2 nd ordre
Fonction de transfert	$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$	$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$	$\underline{H}(j\omega) = \frac{jH_0 \frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$
Domaine de fréquences du caractère intégrateur	$f \geq 10f_0$	$10Qf_0 \leq f \leq \frac{f_0}{10Q}$	$f \geq \sqrt{10}f_0$ et $f \leq 10 \frac{f_0}{Q}$

✓ Caractère dérivateur

- Le caractère dérivateur d'un filtre est défini sur un domaine de fréquences limité dans lequel on peut écrire sa fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{s}{e} = j\omega k$$

où k est une constante positive ou négative.

• De manière graphique

Un système électronique possède un caractère dérivateur pour un signal d'entrée sinusoïdal de fréquence f_1 si autour de cette fréquence :

- le gain du filtre possède une pente de $+20$ dB par décade.
- le signal de sortie est en quadrature de phase avec le signal d'entrée.

Dans cet ouvrage, nous prendrons, de manière arbitraire, une tolérance de 5 % sur la phase et de 10 % sur l'amplification.

Type de filtre	Filtre passe-haut du 1 ^{er} ordre	Filtre passe-haut du 2 nd ordre	Filtre passe-bande du 2 nd ordre
Fonction de transfert	$\underline{H}(j\omega) = \frac{jH_0 \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$	$\underline{H}(j\omega) = \frac{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} H_0}{1 + j \frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$	$\underline{H}(j\omega) = \frac{jH_0 Q \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$
Domaine de fréquences du caractère intégrateur	$f \ll \frac{f_0}{10}$	$10Qf_0 \ll f \ll 10\frac{f_0}{Q}$	$f \ll \frac{f_0}{\sqrt{10}}$ et $f \ll \frac{Qf_0}{10}$

✓ **Caractère intégrateur ou dérivateur pour un signal périodique**

Un filtre possède un caractère dérivateur ou intégrateur pour un signal périodique s'il possède un caractère dérivateur ou intégrateur pour les harmoniques d'amplitude non négligeable de ce signal.

Mise en œuvre

Méthode n° 1

Comment déterminer de manière théorique le domaine de fréquences sur lequel le filtre possède un caractère intégrateur ou dérivateur ?

On se propose d'étudier le caractère intégrateur ou dérivateur d'un filtre à partir de sa fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$.

→ Savoir faire

- ❶ Trouver les termes à négliger dans la fonction de transfert du filtre pour obtenir une fonction de transfert du type :

$$\underline{H} = \frac{s}{s} = -j \frac{k}{\omega} \text{ pour le caractère intégrateur}$$

$$\underline{H} = \frac{s}{s} = j\omega k \text{ pour le caractère dérivateur}$$

- ❷ En déduire les valeurs de pulsations pour lesquelles cette approximation est valable.

→ Application

Déterminer le domaine intégrateur du filtre de fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j5 \cdot 10^{-3}\omega}{2 + j5 \cdot 10^{-4}\omega - 10^{-6}\omega^2}$$

Solution

- ❶ La fonction de transfert est proportionnelle à $\frac{1}{\omega}$ dans le cas du caractère intégrateur.

Il faut donc que le dénominateur soit proportionnel à ω^2 . Cela signifie que :

$$10^{-6}\omega^2 \gg 1 \quad \text{et} \quad 10^{-6}\omega^2 \gg 5 \cdot 10^{-4}\omega$$

On considère que cela est vérifié pour :

$$10^{-6}\omega^2 \approx 10 \quad \text{et} \quad 10^{-6}\omega^2 \approx 5 \cdot 10^{-3}\omega$$

- ② On en déduit les valeurs de pulsation pour lesquelles les deux conditions précédentes sont vérifiées :

$$\omega \approx 3,2 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad \omega \approx 5 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Donc le domaine intégrateur du filtre est :

$$\omega \in [5 \cdot 10^3 ; +\infty[\quad \text{ou} \quad f \in [800 ; +\infty[$$

Méthode n° 2

Comment déterminer de manière graphique le domaine de fréquences sur lequel le filtre possède un caractère intégrateur ou dérivateur ?

On se propose d'étudier le caractère intégrateur ou dérivateur d'un filtre à partir de ses diagrammes de Bode du gain et de la phase.

→ Savoir faire

- ① Déterminer le domaine de fréquences où le diagramme de Bode du gain a une pente de -20 dB par décade pour le caractère intégrateur et une pente de $+20$ dB par décade pour le caractère dérivateur.
- ② Déterminer le domaine de fréquences où le diagramme de Bode de la phase est tel que la phase a une valeur égale à $\pm \frac{\pi}{2}$ à 5 % près.
- ③ En déduire le domaine de fréquences du caractère intégrateur ou dérivateur.

→ Application

Un filtre passe-bande est caractérisé par les diagrammes de Bode suivant :

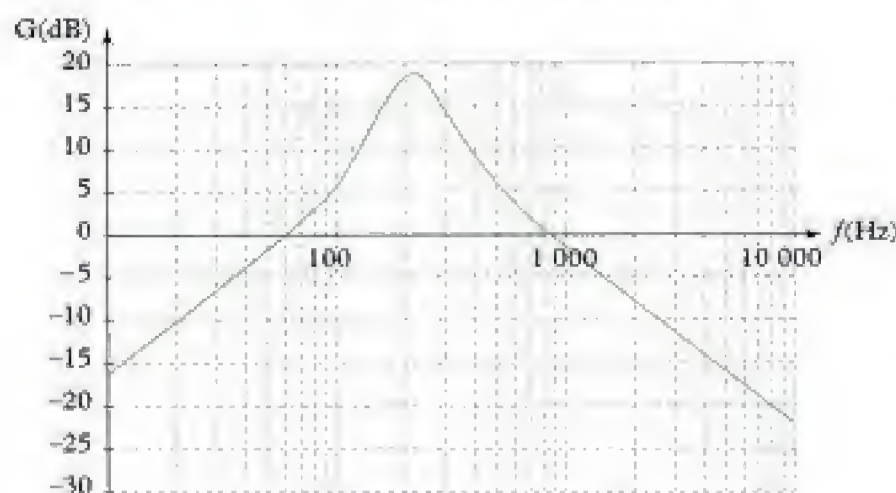


Diagramme de Bode du gain

Hidden page

Hidden page

Exercices

Niveau 1

Ex. 1

Déterminer le domaine de fréquences du caractère intégrateur ou dérivateur des filtres de fonction de transfert suivantes :

$$1) \underline{H}_1(j\omega) = \frac{j(1,6 \cdot 10^{-6}\omega)}{1 + j(1,6 \cdot 10^{-6}\omega) - 25 \cdot 10^{-11}\omega^2}$$

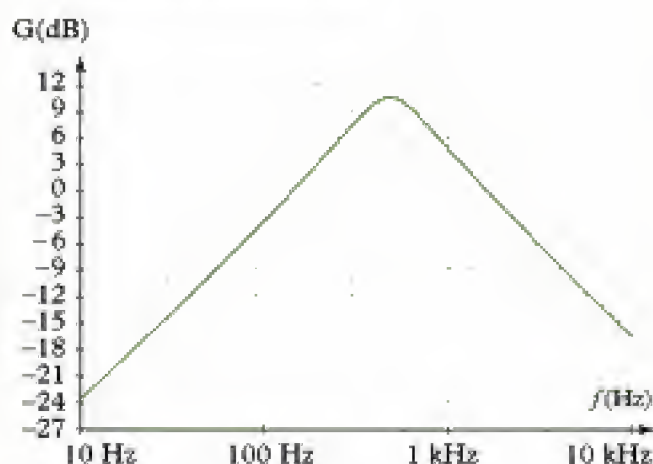
$$2) \underline{H}_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j(6,3 \cdot 10^{-4}\omega) - 25 \cdot 10^{-11}\omega^2}$$

Ex. 2

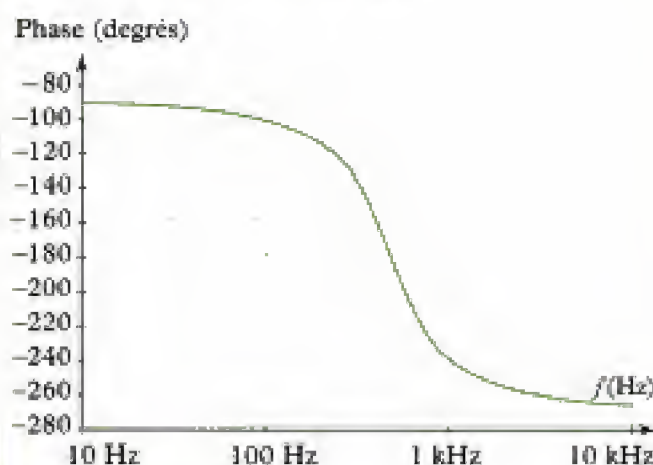
Étudier les caractères intégrateur ou dérivateur des filtres 1 et 2 dont les diagrammes de Bode sont donnés ci-dessous :

1) Filtre 1

• Diagramme de Bode du gain :

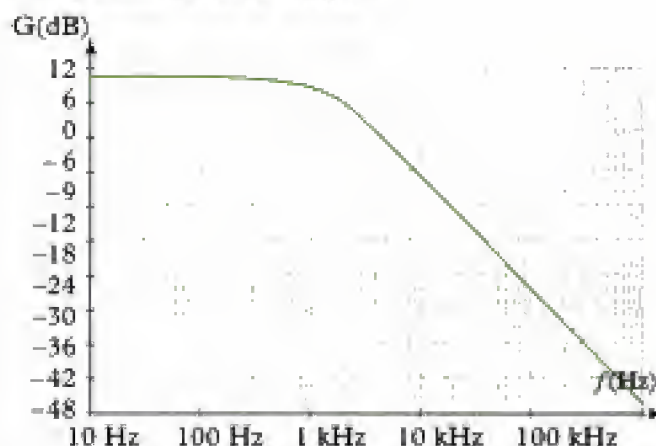


• Diagramme de Bode de la phase :

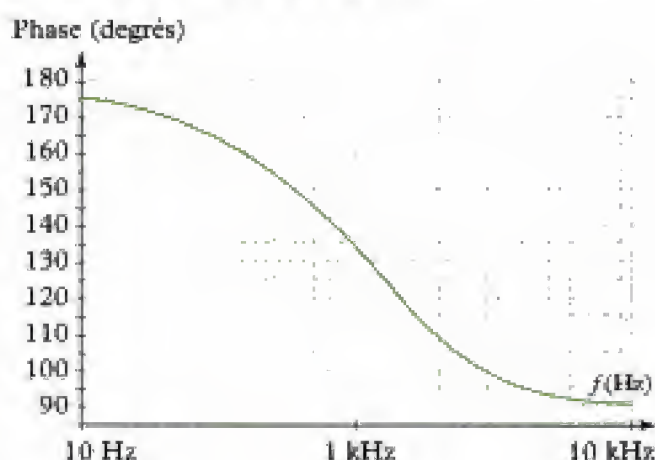


2) Filtre 2

• Diagramme de Bode du gain :



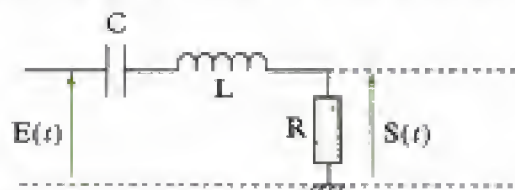
• Diagramme de Bode de la phase :



Niveau 2

Ex. 3 Filtre RLC série

Pour le filtre RLC dessiné ci-dessous, on note $E(t)$ la tension imposée à l'entrée et $S(t)$ la tension de sortie.



1) Mettre la fonction de transfert sous la forme proposée (en précisant les expressions de Q et ω_0 en fonction de R , L et C) :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

2) Quelles valeurs numériques faut-il donner à L et à C afin d'obtenir un filtre pour lequel $Q = 200$ et $\omega_0 = 4 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, lorsque $R = 10 \Omega$?

3) Évaluer numériquement $|H|$ pour $\omega = \omega_0 \times 1,05$, puis pour $\omega = \frac{\omega_0}{1,05}$.

4) Décrire en une phrase le comportement de ce filtre en régime sinusoïdal.

À quelles conditions peut-on le considérer comme un montage intégrateur ?

À quelles conditions peut-on le considérer comme un montage dérivateur ?

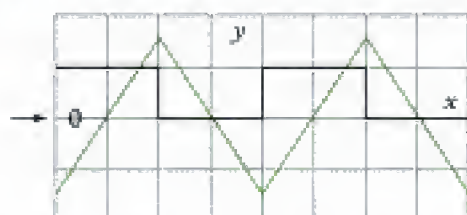
Ex. 4 : Détermination expérimentale des paramètres d'un filtre passe-bande

Pour un filtre passe-bande, la fonction de transfert peut s'écrire :

$$H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{H_0}{1 - jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Déterminer H_0 , Q et ω_0 à l'aide des deux expériences décrites ci-dessous.

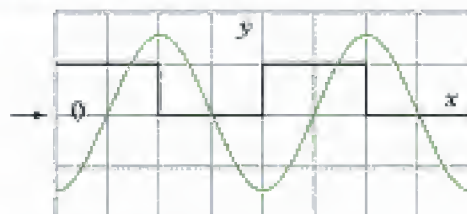
Expérience 1 : le signal d'entrée est carré



x : 1 carreau = 1 ms

y : 1 carreau = 0,1 V pour le signal d'entrée et 20 mV pour le signal de sortie

Expérience 2 : le signal d'entrée est carré



x : 1 carreau = 10 ms

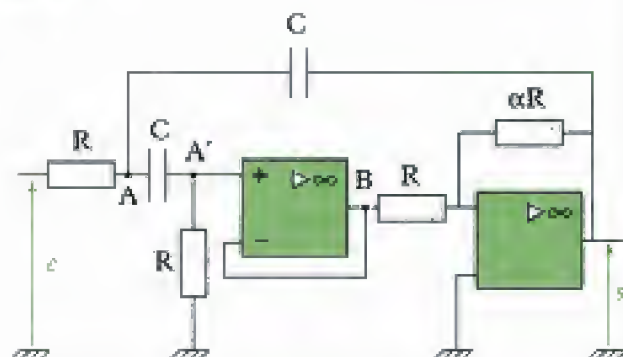
y : 1 carreau = 0,1 V pour le signal d'entrée et 2 V pour le signal de sortie

Dans l'expérience 2, si on augmente légèrement la fréquence du signal d'entrée l'amplitude du signal de sortie diminue ; si on diminue légèrement cette fréquence, l'amplitude diminue aussi.

Données : l'amplitude du fondamental d'un signal carré d'amplitude E vaut $\frac{4E}{\pi}$.

Oral, CCP PSI 2003.

Ex. 5



Le filtre suivant a pour fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{-\frac{\alpha}{3}}{1 + \frac{1}{3}\left[(\alpha + 1)RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right]}$$

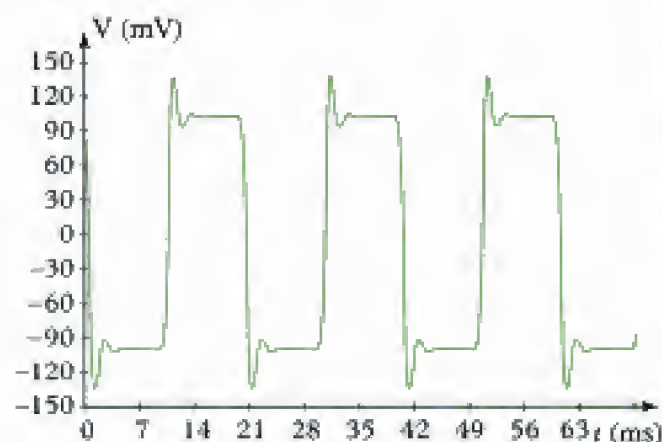
(voir exercice n° 6 chapitre 2).

On pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha + 1}RC} = \frac{2\pi}{T_0}$ et $\alpha = 10$.

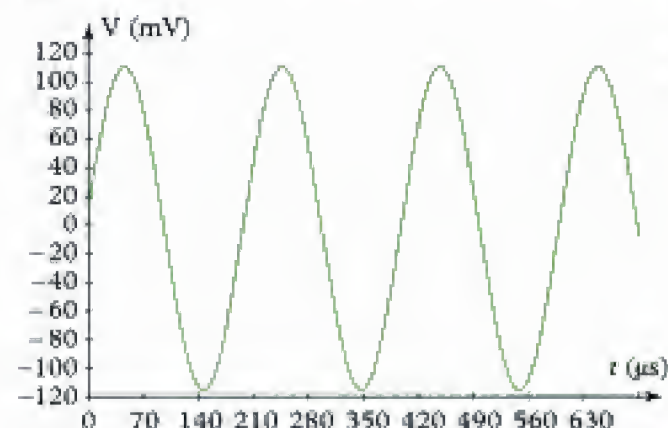
$e(t)$ est un signal triangulaire de valeur moyenne nulle, d'amplitude $2E_0$ et de période T . On observe les réponses suivantes (courbes ci-dessous).

Interpréter ces deux résultats.

1)



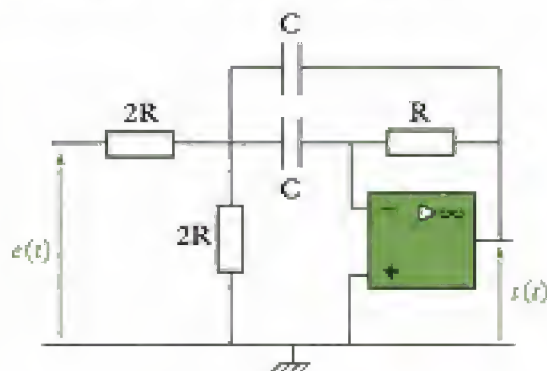
2)



Niveau 3

Ex. 6

On considère le montage représenté ci-dessous où l'amplificateur opérationnel est idéal et fonctionne en régime linéaire, $R = 1 \text{ k}\Omega$ et $C = 100 \text{ nF}$.



1) Déterminer le comportement basse fréquence (BF) et haute fréquence (HF) du montage. À quoi est-il équivalent ? Quelle est la nature de ce filtre ?

2) La fonction de transfert du filtre est :

$$\underline{H} = \frac{-\frac{1}{4}}{1 + \frac{j}{2}\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

On pose $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

On attaque le montage par des signaux carrés d'amplitude 5 V, de fréquences :

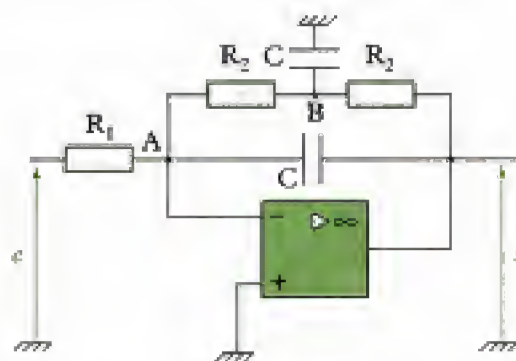
$$f_1 = 10 \text{ Hz}, \quad f_2 = 2 \text{ kHz} \quad \text{et} \quad f_3 = 50 \text{ Hz}.$$

Qu'observons-nous pour le signal de sortie $s(t)$?

3) Même question avec des signaux triangulaires de mêmes fréquences et mêmes amplitudes.

Ex. 7

L'A.O. du système électronique représenté ci-dessous est parfait et fonctionne en régime linéaire.



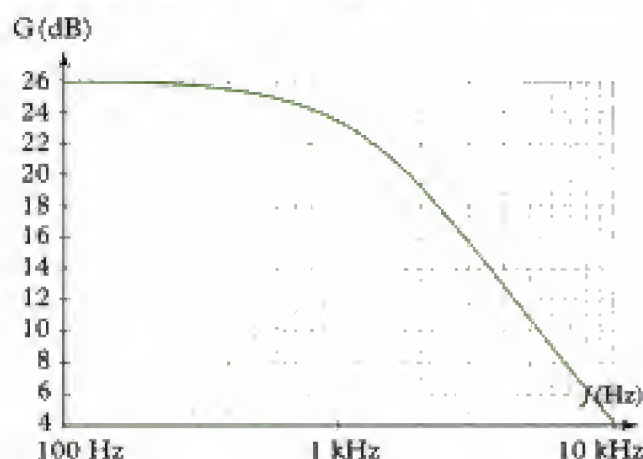
Données : $C = 10 \text{ nF}$, $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ et $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$.

On alimente le circuit par un signal carré à valeur moyenne nulle variant entre $-V_0$ et $+V_0$ et de fréquence f .

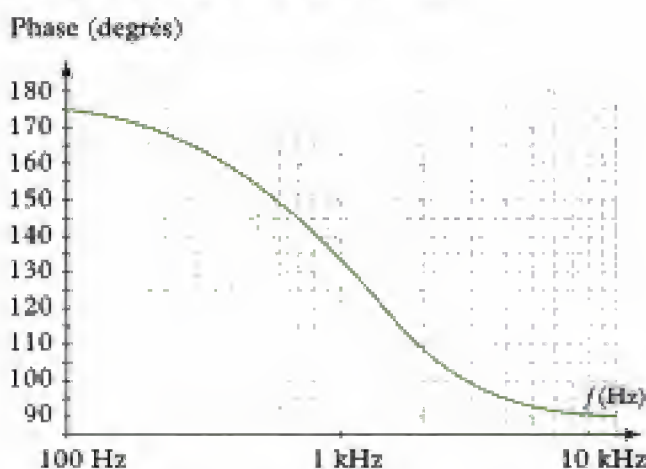
1) Déterminer la nature du filtre.

2) D'après les diagrammes de Bode ci-dessous, définir le domaine de fréquence du caractère intégrateur.

• Diagramme de Bode du gain

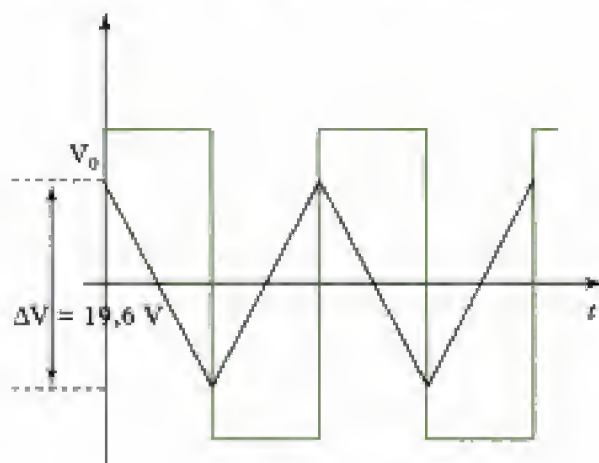


• Diagramme de Bode de la phase

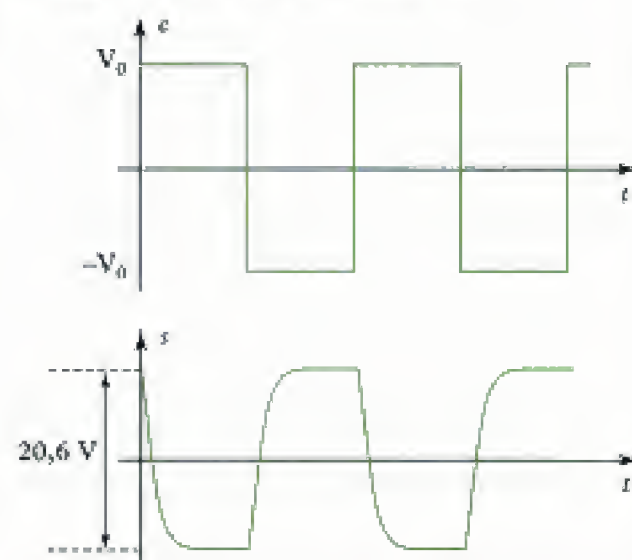


3) L'expérience donne les résultats suivants :

• 1^{er} cas : $2V_0 = 9,4 \text{ V}$ et $f = 12 \text{ kHz}$.



• 2^e cas : $2V_0 = 1,02 \text{ V}$ et $f = 120 \text{ Hz}$.



Justifier ces résultats de manière qualitative et quantitative.

Indications

Ex. 5 2) On détermine les domaines intégrateur et dérivateur avant d'étudier les réponses du filtre. Pour l'étude de la fonction de transfert dans certains cas, on retrouve l'amplitude du signal de sortie.

Ex. 6 3) L'étude du 1^{er} cas est faite d'abord de manière qualitative puis quantitative. Pour cela, il faut déterminer l'équation de l'asymptote afin de

pouvoir écrire la fonction de transfert sous la forme

$$\underline{H} = j \frac{k}{\omega} \text{ et d'en déduire la valeur de } \Delta V.$$

De même, l'analyse qualitative du deuxième cas nécessite une étude de la courbe du gain pour en déduire l'amplitude de $s(t)$ en fonction de celle de $e(t)$.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

On met en œuvre la méthode n° 1.

1) • Le filtre de fonction de transfert $\underline{H}_1(j\omega)$ possède un caractère intégrateur si

$$\underline{H}_1(j\omega) \approx -j \frac{k}{\omega}.$$

Dans notre cas, $k = 6\,400$.

Ceci est réalisé si $25 \cdot 10^{-11} \omega^2 \gg 1$ et $1,6 \cdot 10^{-6} \omega \ll 25$, soit aussi :

$$\omega^2 \gg 4 \cdot 10^9 (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})^2 \text{ et } \omega \gg 6\,400 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

On considère que le domaine intégrateur est défini par :

$$\omega \gg 2 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{ et } \omega \gg 6,4 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Le **domaine intégrateur** est défini par :

$$\omega \in [2 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} ; +\infty[\text{ ou } f \in [32 \text{ kHz} ; +\infty[$$

• Le filtre de fonction de transfert $\underline{H}_2(j\omega)$ possède un caractère dérivateur si

$$\underline{H}_2(j\omega) \approx jk'\omega.$$

Dans notre cas, $k' = 1,6 \cdot 10^{-6}$.

Ceci est réalisé si $1 \gg 25 \cdot 10^{-11} \omega^2$ et $1 \gg 1,6 \cdot 10^{-6} \omega$, soit aussi :

$$\omega^2 \ll 4 \cdot 10^9 (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})^2 \text{ et } \omega \ll 6,25 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

On considère alors que le domaine dérivateur est défini par :

$$\omega^2 \leq 4 \cdot 10^8 (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})^2 \text{ et } \omega \leq 6,25 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Donc $\omega \leq 2 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega \leq 6,25 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Le **domaine dérivateur** est défini par :

$$\omega \in [0 ; 2 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}] \text{ ou } f \in [0 ; 32 \text{ kHz}]$$

2) Ce filtre ne possède pas de domaine dérivateur.

En revanche, le domaine de pulsations dans lequel il a un effet intégrateur est défini par :

$$6,3 \cdot 10^{-4} \omega \gg 1 \text{ et } 6,3 \cdot 10^{-4} \omega \gg 25 \cdot 10^{-11} \omega^2.$$

Ce qui donne $\omega \gg 1,6 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega \ll 2,5 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

On en déduit le **domaine intégrateur du filtre** :

$$\omega \in [1,6 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} ; 2,5 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}] \text{ ou } f \in [2,5 \text{ kHz} ; 40 \text{ kHz}]$$

Exercice 2

On met en œuvre la méthode n° 2.

1) Les diagrammes de Bode montrent que le filtre aura un effet dérivateur en basse fréquence et intégrateur en haute fréquence.

• **Caractère dérivateur**

L'étude du diagramme de Bode du gain s'effectue en traçant la droite de pente +20 dB/décade ainsi que le tube à $\pm 0,9$ dB du diagramme réel.

Hidden page

2) Ce filtre possède uniquement un caractère intégrateur.

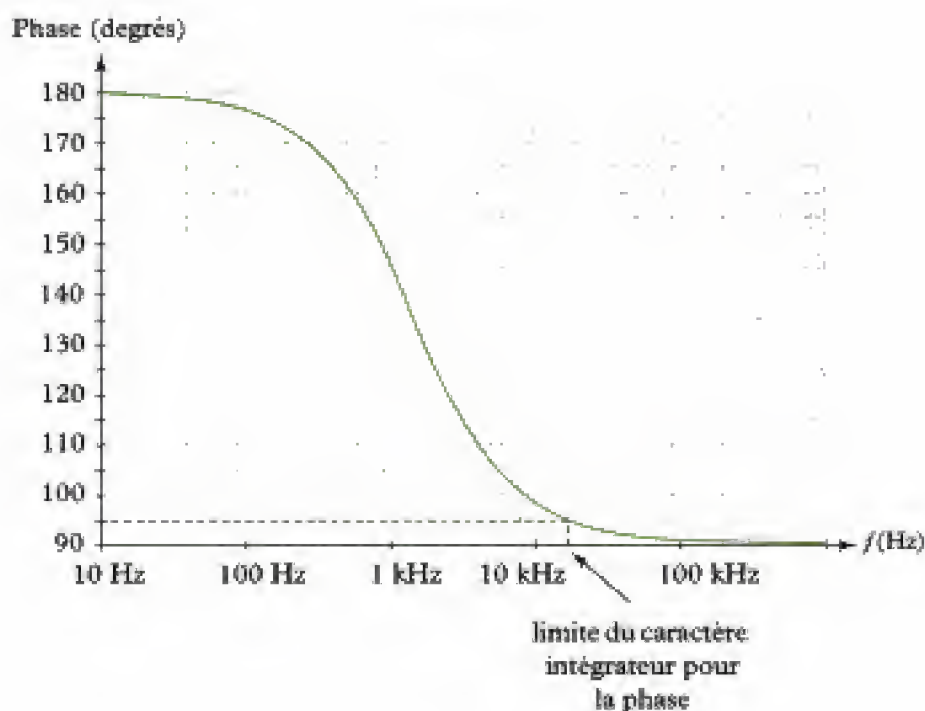
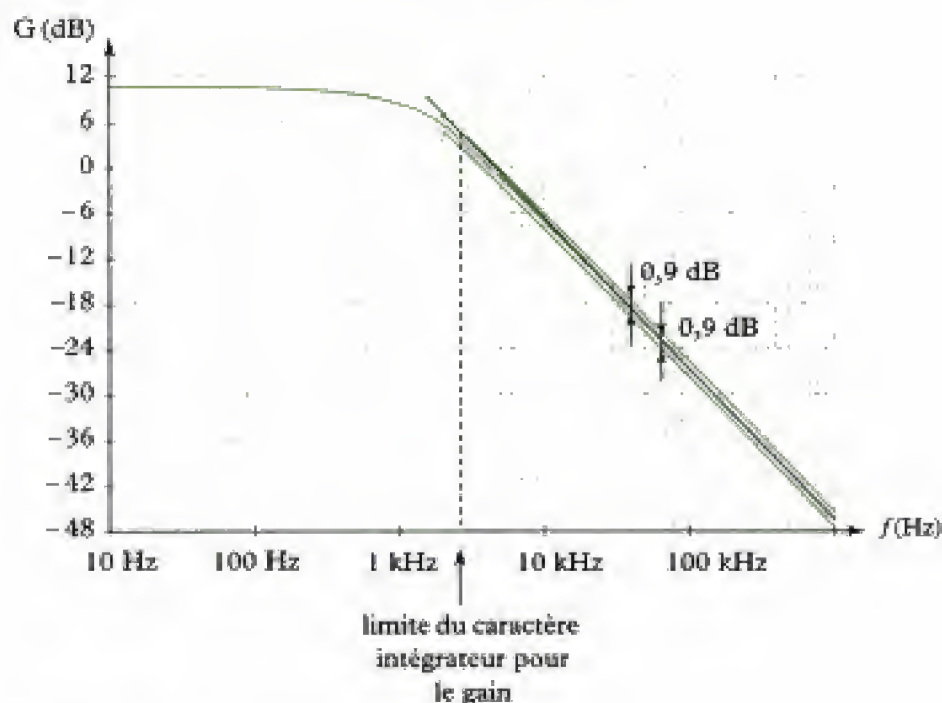
On trace alors la droite asymptotique à -20 dB/décade sur le diagramme de Bode du gain.

On détermine le domaine de fréquence pour lequel la phase est comprise entre 90° et 95° et le gain sur la droite asymptote est supérieur au gain réel $-0,9$ dB.

On obtient pour l'effet intégrateur :

$$f \in [20 \text{ Hz} ; +\infty[$$

→ Pour le filtre 2



Exercices de niveau 2

Exercice 3

1) La fonction de transfert est obtenue en utilisant la formule du diviseur de tension :

$$\underline{S} = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \underline{E}$$

D'où :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

En posant $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, on obtient :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

2) On a $\frac{Q}{\omega_0} = \frac{L}{R}$ et $Q\omega_0 = \frac{1}{RC}$. Donc :

$$L = \frac{RQ}{\omega_0} \quad \text{et} \quad C = \frac{1}{RQ\omega_0}$$

Application numérique : $L = 0,05 \text{ H}$ et $C = 12,5 \text{ nF}$.

3) Pour $\omega = \omega_0 \times 1,05$, $|\underline{H}| = 0,05$.

Pour $\omega = \frac{\omega_0}{1,05}$, $|\underline{H}| = 0,05$.

4) On met en œuvre la méthode n° 1.

• Il s'agit ici d'un filtre passe-bande.

• Ce filtre possède un caractère dérivateur si la fonction de transfert est du type : $\underline{H} = -j \frac{\omega}{Q\omega_0}$.

Donc pour $\frac{\omega}{\omega_0} \ll \frac{\omega_0}{\omega}$ et $1 \ll \frac{\omega_0}{\omega}$, qui est vérifié, d'après le critère vu en cours si :

$$\frac{\omega}{\omega_0} \leq 10 \frac{\omega_0}{\omega} \quad \text{et} \quad 1 \leq 10 \frac{\omega_0}{\omega}.$$

D'où $\omega \leq 1,26 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega \leq 4 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

On pourra considérer que le filtre possède un effet dérivateur pour :

$$\omega \in [0 ; 1,26 \cdot 10^5] \text{ (rad} \cdot \text{s}^{-1}) \quad \text{et} \quad f \in [0 ; 20 \cdot 10^3] \text{ (Hz)}$$

Remarque : Le critère utilisé ici est une première approximation.

Il convient d'adapter le critère à l'utilisation du signal. Ce qui compte en fait, c'est de connaître un ordre de grandeur de la limite du domaine.

• Ce filtre possède un caractère intégrateur si la fonction de transfert est du type : $\underline{H} \approx -j \frac{\omega_0}{Q\omega}$.

Donc pour $\frac{\omega}{\omega_0} \gg \frac{\omega_0}{\omega}$ et $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$ et d'après le critère pris en cours ceci est vérifié si :

$$\frac{\omega}{\omega_0} \geq 10 \frac{\omega_0}{\omega} \quad \text{et} \quad \frac{\omega}{\omega_0} \geq 10.$$

D'où $\omega \approx 1,26 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega \approx 4 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

On pourra considérer que le filtre possède un effet intégrateur pour :

$$\omega \in [4 \cdot 10^5 ; +\infty[\text{ (rad} \cdot \text{s}^{-1}) \quad \text{ou} \quad f \in [64 \cdot 10^3 ; +\infty[\text{ (Hz)}$$

Remarque : Ce qui est à retenir ici, c'est l'ordre de grandeur de la fréquence limite.

Exercice 4

Pour déterminer les paramètres, il faut étudier les résultats de chaque expérience.

→ Commençons par l'expérience 2.

On observe un signal de sortie quasi-sinusoïdal et de même période que le signal d'entrée : On peut donc admettre qu'il s'agit du fondamental du signal d'entrée qui est sélectionné par le filtre. De plus, pour une fréquence légèrement différente (supérieure comme inférieure), l'amplitude du signal de sortie diminue ce qui permet de conclure que la fréquence des signaux est alors à $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ car :

$$|H| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \text{ est maximal si } \omega = \omega_0.$$

On lit sur l'oscillogramme :

$$T_0 = 4 \times 10 \text{ ms} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{40 \cdot 10^{-3}} = 157 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Cette expérience permet également de déterminer H_0 à partir du calcul de l'amplitude :

- du fondamental de $V_e(t)$: $4 \times \frac{E}{\pi} = \frac{4 \times 0,05}{\pi} \text{ V}$;



L'amplitude du signal d'entrée est égale à la moitié d'une division de l'axe y, soit ici 0,05 V compte tenu de la sensibilité verticale de la voie de mesure de $V_e(t)$.

- du signal de sortie $V_s(t) = 3 \text{ V}$ donc : $H_0 = \frac{3}{\frac{0,2}{\pi}} = 47,1$.

→ Passons à l'expérience 1 ; le signal de sortie est ici triangulaire donc proportionnel à l'intégrale du signal d'entrée. Celui-ci est donc dans la bande coupée H.F. comme le confirme la lecture de la base de temps (10 μs par division) :

$$\frac{T}{T_0} = \frac{10 \mu\text{s}}{40 \text{ ms}} = 2,5 \cdot 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = 40 \gg \frac{\omega_0}{\omega}.$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{H_0}{jQ \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{H_0 \cdot \omega_0}{Q} \times \frac{1}{j\omega}$$

$$\Leftrightarrow j\omega \cdot \underline{V}_s = \frac{H_0 \cdot \omega_0}{Q} \cdot \underline{V}_e.$$

Ainsi lorsque $V_e(t) = 2E$, on lit sur l'oscillogramme :

$$\frac{\Delta V_s}{\Delta t} = \frac{H_0 \cdot \omega_0}{Q} \cdot 2E \Leftrightarrow Q = \frac{2H_0 \cdot \omega_0 \cdot E}{\frac{\Delta V_s}{\Delta t}}$$

avec $\Delta t = 2 \text{ ms}$ (2 divisions sur x), $\Delta V_s = 60 \text{ mV}$ (3 divisions sur y) et $E = 0,05 \text{ V}$ (0,5 division sur y) ; donc :

$$Q = \frac{2 \cdot 47,1 \cdot 157 \cdot 0,05}{\frac{60 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}}} = 24,6.$$

Hidden page

Hidden page

• Domaine dérivateur

Le filtre possède un effet dérivateur si :

$$\frac{\omega}{\omega_0} \ll \frac{\omega_0}{\omega} \quad \text{et} \quad 1 \ll \frac{Q\omega_0}{\omega}$$

Ce qui est vérifié si $\omega^2 \ll \omega_0^2$ et $\omega \ll Q\omega_0$.

On considère que le caractère dérivateur est obtenu pour $\omega \leq \frac{\omega_0}{\sqrt{10}}$ et $\omega \leq \frac{Q\omega_0}{10}$.

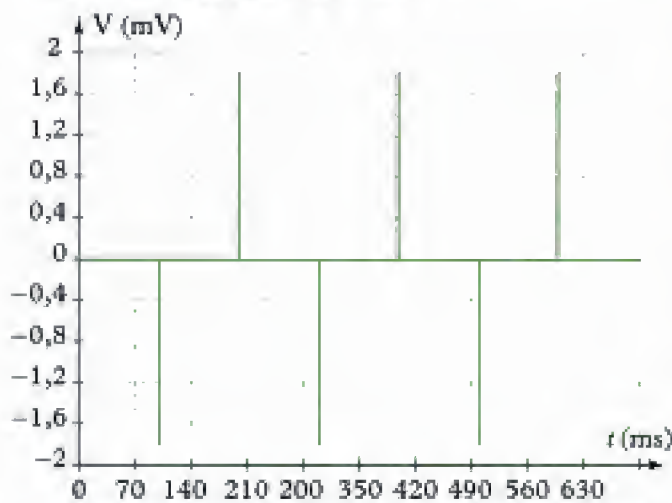
Ce qui donne : $\omega \leq 3,2 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega \leq 500 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Ainsi, le filtre possède un caractère dérivateur pour :

$$\omega \leq 500 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{soit} \quad f \leq 80 \text{ Hz}$$

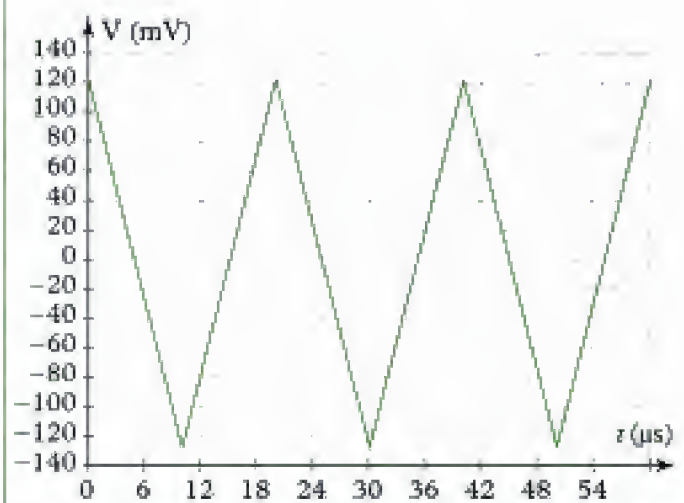
Donc :

→ Pour $f_1 = 10 \text{ Hz}$, le signal de sortie est constitué d'un ensemble de pics correspondant aux discontinuités du signal d'entrée comme le montre la figure ci-dessous.



Réponse pour un signal d'entrée carré de fréquence 10 Hz et d'amplitude 5 V.

→ Pour $f_1 = 50 \text{ kHz}$, le signal de sortie est un signal triangulaire comme le montre la figure ci-dessous.



Réponse pour un signal d'entrée carré de fréquence 50 kHz et d'amplitude 5 V.

La fonction de transfert est alors de la forme :

$$\underline{H} \approx \frac{j}{2RC\omega}$$

Donc, dans le domaine temporel, on a :

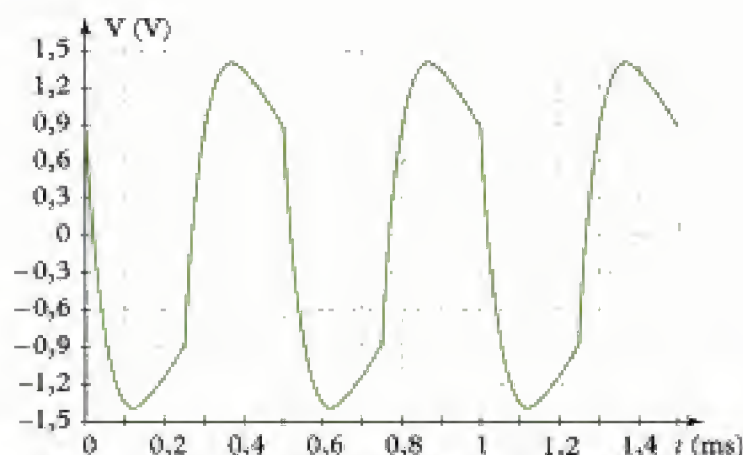
$$\frac{ds}{dt} \approx -\frac{1}{2RC}e(t).$$

La pente du signal de sortie devrait être $\frac{5}{2RC}$ puisque l'amplitude de $e(t)$ est 5 V.

Or, la mesure sur la courbe donne une pente de $24,5 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\frac{5}{2RC} = 25 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}$.

Ceci confirme le caractère intégrateur.

→ Pour $f_1 = 2 \text{ kHz}$, on ne peut rien dire sauf que le signal carré sera déformé comme le montre la figure ci-dessous.



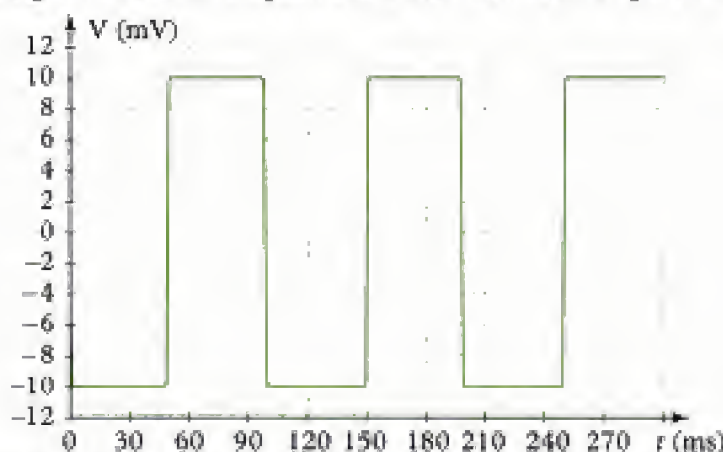
Réponse pour un signal d'entrée carré de fréquence 2 kHz et d'amplitude 5 V.

3) • Pour $f_1 = 10$ Hz, le signal de sortie est un signal carré puisque l'on se trouve dans le domaine dérivateur.

Or $\underline{H} \approx -jRC\omega$. Donc, dans le domaine temporel, on a $s(t) \approx -RC \frac{de(t)}{dt}$.

Or, la pente du signal d'entrée est de $100 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}$ pour une amplitude de 5 V.

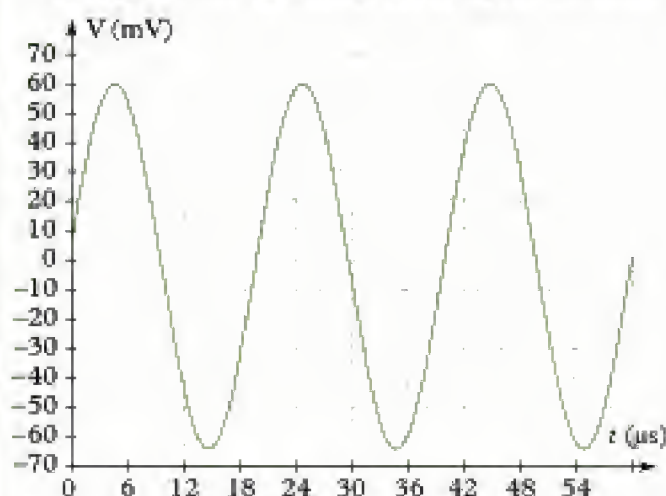
Donc on doit avoir un signal de sortie d'amplitude $100 RC \approx 10 \text{ mV}$, ce qui se vérifie sur la figure suivante :



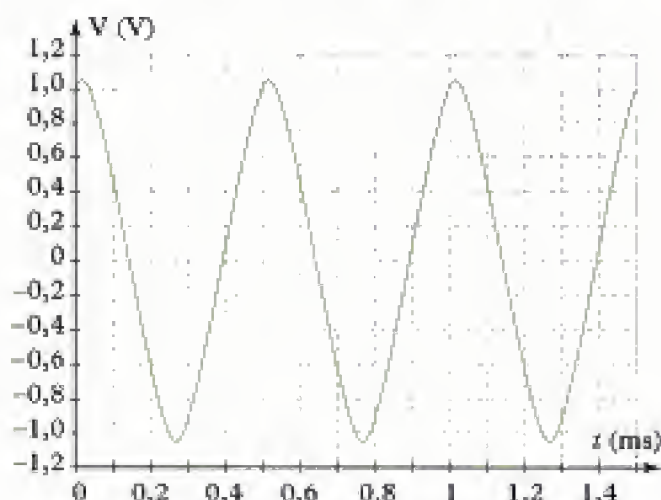
Réponse pour un signal d'entrée triangulaire de fréquence 10 Hz et d'amplitude 5 V.

• Pour $f_1 = 50$ kHz, le signal de sortie est formé d'arcs de parabole (intégrateur d'un triangle). Ceci est vérifié sur la figure suivante.

• Pour $f_1 = 2$ kHz, le signal de sortie est un signal déformé et proche d'une sinusoïde.



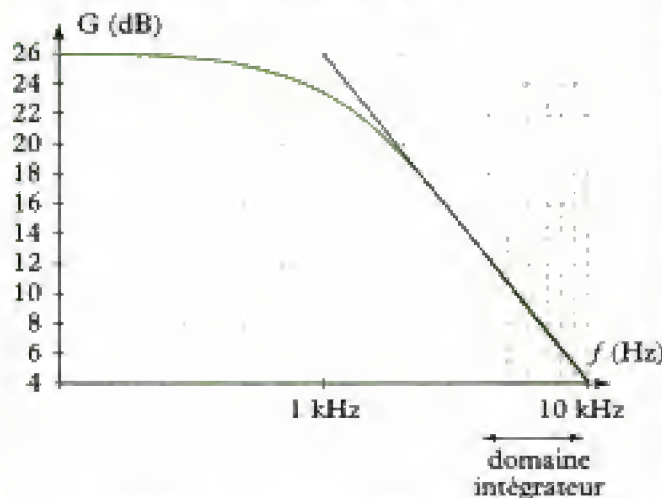
Réponse pour un signal d'entrée triangulaire de fréquence 50 kHz et d'amplitude 5 V.



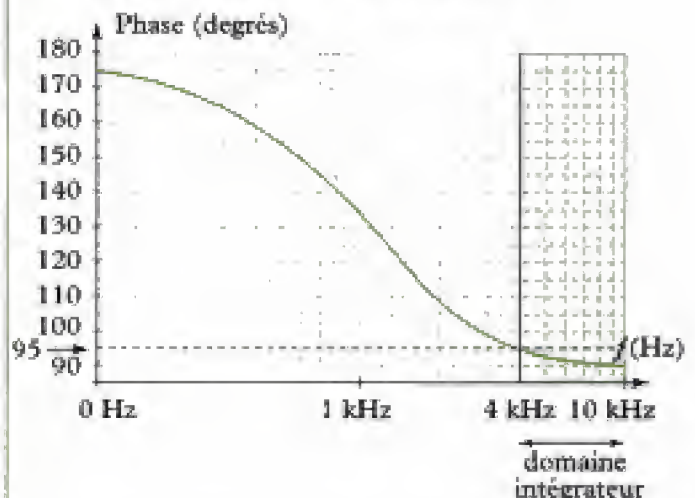
Réponse pour un signal triangulaire de fréquence 2 kHz et d'amplitude 5 V.

Hidden page

• Diagramme de Bode du gain :



• Diagramme de Bode de la phase :



3) • Étude du premier cas

Tous les harmoniques du signal d'entrée se trouvent dans le domaine intégrateur du filtre.

On retrouve donc un signal de sortie triangulaire.

La droite asymptote de pente -20 dB par décade passe par le point $(10 \text{ kHz} ; 4,4 \text{ dB})$ donc son équation est :

$$G_{dB} = A - 20 \log(\omega).$$

Or $4,4 = A - 20 \log(2\pi \times 10^4)$. D'où $A = 100,4 \text{ dB}$.

On trouve alors pour l'asymptote : $G_{dB} = 100,4 - 20 \log(\omega)$.

Or dans le domaine intégrateur, on a :

$$\underline{H} = j \frac{k}{\omega}.$$

D'où $20 \log(k) = 100,4$ soit $k = 10^5$.

Ce qui donne, dans le domaine temporel : $\frac{ds(t)}{dt} = ke(t) = 10^5 e(t)$.

Donc pour une amplitude de $4,7 \text{ V}$ en entrée, le signal de sortie a une pente de $4,7 \cdot 10^5 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}$.

Donc, sur une demi-période, le signal de sortie varie de $4,7 \cdot 10^5 \times 4,2 \cdot 10^{-5} = 19,6 \text{ V}$.

Ce qui correspond à la donnée de l'énoncé.

• Étude du 2^e cas

D'après les diagrammes de Bode, les harmoniques d'amplitude non négligeables pour le signal d'entrée se trouvent presque toutes dans la bande passante.

Le signal sera donc amplifié et déformé puisque les harmoniques ne sont pas déphasés de manières identiques.

L'amplification correspond à un gain d'environ 26 dB , soit $H = 20$, ce que l'on retrouve sur les graphes puisque $\frac{20,6}{1,02} = 20,2$.

On retrouve donc un résultat cohérent.

Index

A

amplitude, 7
analyse spectrale, 12

B

bande
– coupée, 30
– passante, 30
Bessel-Parseval (égalité de), 14
Bode (diagrammes de), 31

C

caractère
– dérivateur, 128
– intégrateur, 120
coefficient de qualité, 31
composante continue, 8
courant, 6

D

décomposition en série de Fourier, 12
densité spectrale de puissance, 14
diagramme de Bode, 31
– asymptotique, 32
– de la phase, 35
– du gain, 34

E

échelle logarithmique, 31
effet d'un filtre, 83, 138
égalité de Bessel-Parseval, 14

F

filtrage, 30
filtre, 30
– coupe-bande du second ordre, 44
– passe-bande, 95
– du second ordre, 40, 123, 132
– passe-bas
– du premier ordre, 86, 121, 137
– du second ordre, 33, 89, 127
– passe-haut
– du premier ordre, 92, 130, 138
– du second ordre, 37, 89, 135

fonction de transfert, 33
fondamental, 8
Fourier (théorème de), 8
fréquence, 6

G-H

gain, 31
harmonique
– premier, 8
– d'ordre n , 8

O-P

ordre
– d'un filtre, 30
– d'un harmonique, 8
période, 6
phase, 7, 31
– à l'origine, 7
– initiale, 7
– instantanée, 7
pulsation, 7
– de coupure, 33
– de résonance, 33
– propre, 31

R-S

représentation fréquentielle, 12
signal
– périodique, 6
– sinusoïdal, 7
somme des diagrammes de Bode, 31
spectre
– d'amplitude, 15
– de Fourier, 11
– de phase, 15
– de puissance, 15
synthèse d'un créneau, 15

T

tension, 6
Théorème de Fourier, 8

V

valeur d'un signal
– efficace, 6, 14
– moyenne, 6

Hidden page

Hidden page

**Titres disponibles en deuxième année
dans la filière MP...**

En Mathématiques
Analyse MP
Algèbre et géométrie MP

En Physique
Optique MP-PC-PSI-PT
Mécanique MP-PC
Électromagnétisme MP
Électronique MP
Thermodynamique MP

En Chimie
Chimie MP-PT

Livres d'exercices
Mathématiques MP
Physique MP

LES NOUVEAUX Précis BRÉAL

Une collection tenant compte de vos besoins et de vos contraintes, conçue pour vous aider tout au long de l'année à préparer efficacement les concours.

- **Un cours complet et très clair**, illustré de nombreux exemples, pour comprendre et assimiler.
- **Des pages de méthode**, facilement mémorisables, pour acquérir les savoir-faire et les réflexes nécessaires.
- **De nombreux exercices corrigés**, variés et progressifs, pour s'entraîner régulièrement.

Les Nouveaux Précis Bréal sont la collection de référence pour réussir sa prépa et intégrer une grande école d'ingénieurs.

BRÉAL L'ÉDITEUR DES PRÉPAS

Réf. : 209.0360
ISBN : 9 782749 503981
www.editions-breial.fr

